Динамика макросистем

Отсоединенные решения в трехмерных обобщенных задачах течения А.Н. Колмогорова*

Н.М. Евстигнеев, О.И. Рябков

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье рассматривается аналитический и численный анализы устойчивости классической и обобщенной задачи А.Н. Колмогорова для уравнений Навье-Стокса, заданных на трехмерном периодическим растянутом торе. Выводятся обобщенная форма уравнений Орра-Зоммерфельда для анализа линейной устойчивости основного решения, проводится построение нейтральных кривых. В результате поиска отсоединенных решений для дискретной задачи найдены 22 отсоединенных решения для классической задачи и 6 решений для обобщенной задачи при линейной устойчивости базового решения. Показано, что хаотическая динамика системы при аналогичных значениях параметров определяется найденными отсоединенными решениями.

Ключевые слова: *анализ линейной устойчивости, уравнения Навье-Стокса, 3D задача Колмогорова, отсоединенные решения, псевдоспектральный метод.*

DOI: 10.14357/20790279240401 **EDN:** GRWYTN

Введение

Поскольку строгого математического определения турбулентности нет, то под ней будем понимать хаотические решения трехмерных по пространству уравнений Навье-Стокса. Более детально о хаотических решения см. [1,2]. Процесс усложнения решений уравнений Навье-Стокса при изменении некоторых параметров задачи будем называть ламинарно-турбулентным переходом. Такие параметры, при которых меняется характер динамики системы, будем называть бифуркационными параметрами. Большинство авторов разделяют ламинарно-турбулентный переход на три стадии (в порядке такого изменения бифуркационных параметров, что решения уравнений переходит от ламинарных к турбулентным). В общем случае ламинарно-турбулентный переход можно разбить на четыре стадии, при этом наличие всех стадий не обязательно.

1. Потеря устойчивости основного течения. На этой стадии основное течение теряет свою устойчивость и образуются вторичные течения. Для анализа данной стадии, в большинстве работ, применяется методы линейной устойчивости и энергетический метод анализа [3], теория слабых нелинейных возмущений [4] и теория косимметрии В.И.Юдовича [5]. Здесь устанавливается связь между первичным и вторичным течением, тип потери устойчивости (суперкритический или субкритический). В случае невозможности выполнения такого анализа аналитическими методами, используются численные [6].
2. Множественные изменения вторичных течений. В зависимости от задачи данный каскад может быть либо полностью субкритическим (например, плоское течение Куэта), либо сме-

* Авторы выражают благодарность Российскому научному фонду (РНФ) за поддержку работы, номер проекта 23-21-00107.

шанным (течение Пуазейля в плоском канале), либо полностью суперкритическим (классическое двумерное течение А.Н. Колмогорова, конвекция Рэлея - Бенара), см. анализ в [7]. Аналитические методы базируются на основе теоремы о центральном многообразии и редукции Ляпунова-Шмидта для анализа первых ответвившихся решений [8]. Также используется теория косимметрии, развитая В.И.Юдовичем и его учениками. В связи с трудностями такого анализа аналитическими методами, на данной стадии превалируют численные методы анализа. Основой таких методов, в настоящее время, являются методы анализа динамических систем. Исследуются критические точки бифуркаций и определяется их тип. Строятся схемы бифуркаций и бифуркационные диаграммы. Усложнение динамики периодических и квазипериодических решений выполняется методами хаотической динамики, что дает понимание усложнения решений при изменении параметров [9]. Для гидродинамических систем такой подход сопряжен со значительными вычислительными трудностями.

3. Кризис вторичных течений. В данной короткой, в смысле изменений параметра, области происходит резкое увеличение размерности многообразия, содержащего решения системы. Кризисы обычно связаны с сильными структурными изменениями фазовых портретов систем и их аттракторов. К известным кризисам можно отнести перемежаемость (более детальный анализ причин данного кризиса см. [1]), протекание границы аттрактора, образование хаотического аттрактора, кризис симметрии, зацепление фазы и другие. Данную стадию чрезвычайно трудно проследить и качественно описать, поскольку на данной стадии численные методы могут уже не отражать действительной картины решения при этом строгого доказательства существования кризисов для уравнений Навье-Стокса и их аналогов показано не было. На этой стадии процесс может описываться взаимодействием нескольких теорий из области хаотической динамики [2].
4. Возникновение развитой турбулентности. Данная стадия является развитием кризисов множества вторичных течений. На данной стадии, чаще всего, возникает автомодельность по числу Рейнольдса (или его аналогам). Решения характеризуются большой нерегулярностью и невозможностью выделить какие-либо структуры в фазовом пространстве. На данной стадии работают методы статистического анализа решений, теория А.Н. Колмогорова и А.М. Обухова, для описания решений применяют методы диаграмм Фейнмана [10, 11] и теорию Крейчнана, методы замыкания моментов цепочек Келлера-Фридмана. Также наблюдается связь между теорией динамических систем с применением топологического подхода, развитого В.И. Арнольдом [12].

Особняком стоит полностью нелинейный сценарий перехода к турбулентности в котором, по сути, нет 1 и 2 стадий. Для таких переходов характерна линейная устойчивость базового основного решения для любых значений параметров (например числа Рейнольдса), которая обычно отвечает аналитическому решению задачи. Более того, такие решения могут проявляться пространственно-локализованными в виде произведения импульса бегущей волны с финитным носителем на хаотическое решение. Характерным примером такого сценария развития турбулентного течения является течения Пуазейля в цилиндрической трубе [13]. В таком случае процесс развития неустойчивостей обычно описывают через усиление наиболее опасных конечных возмущений, которые сразу приводят к переходу на 3 и 4 стадии процессов. Более того, вопрос дальнейшей динамики турбулентности остается открытым до сих пор [13].

В данной работе проводится анализ 3D-задачи А.Н. Колмогорова с классическим силовым воздействием [14] и с его обобщением [15]. Проводится линейный анализ устойчивости базовых решений этих задач. Рассматривается случай, при котором реализуется нелинейный сценарий перехода к хаотическим решениям т.е. базовые решения являются линейно устойчивыми. Но, в отличие от поиска наиболее опасных возмущений, которые приводили бы к возникновению хаотических решений, рассматривается поиск отсоединенных стационарных решений и анализ динамики с учетом их данных. Под отсоединенными решениями понимаются такие, которые не являются продолжением базового решения на заданном диапазоне вариации параметра. Более детально смотрите работу [16].

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщение задачи А.Н. Колмогорова [14] для трехмерных уравнений Навье-Стокса. Областью расчета является вытянутый в одном направлении тор $\boldsymbol{T}^3(\alpha)$ параметризуемый коэффициентом расширения $\alpha \in \mathbb{R}^+$: $\boldsymbol{T}(\alpha)^3 := [\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}/\alpha)]\times[\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})]\times[\mathbb{R}/(2\pi\ \mathbb{Z})]$. Рассматриваются вектор-функция скорости $u{:}\boldsymbol{T}(\alpha)^3 \to \mathbb{R}^3$ и скалярная функция давления $p{:}\boldsymbol{T}(\alpha)^3 \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют следующей системе безразмерных уравнений:

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{1}$$

$$\partial u / \partial t + (u, \nabla) u + \nabla p - R^{-1} \Delta u - \boldsymbol{f} = 0, \tag{2}$$

при условии нулевого суммарного расхода жидкости через область, где R – число Рейнольдса (бифуркационный параметр); f – вектор-функция внешней силы, определяющая задачу. Уравнение (1) является законом сохранения массы (для рассматриваемого несжимаемого случая является условием отсутствия источников и стоков) а (2) – законом сохранения количества движения; граничные условия – условия периодичности во всех направлениях.

Для классической задачи [14] простое трехмерное обобщение для силы имеет вид:

$$\boldsymbol{f} = (sin(y), 0{,}0)^T \tag{I}$$

и задача имеет тривиальное аналитическое решение $p_0 = const, \boldsymbol{u}_0 = (R\,sin(y)\,, 0{,}0)^T$.

Для обобщенной задачи рассматривается сила в виде:

$$\boldsymbol{f} = (sin(y) cos(z), 0{,}0)^T \tag{II}$$

из [15], задача имеет тривиальное решение:

$$p_0 = const, \boldsymbol{u}_0 = \left(\frac{R}{2} sin(y) cos(z), 0{,}0\right)^T.$$

Заметим, что существует масса других способов ввести безразмерный комплекс числа Рейнольдса, например [17]. Здесь параметр выбран из соображений удобства и не играет существенной роли. Коэффициент пересчета из используемого числа R в число Re из [17] определяется как $Re = \sqrt{2\pi} R$.

2. Линейный анализ устойчивости основного решения

2.1. Линейный анализ устойчивости базового решения

Анализ устойчивости проводится путем вывода уравнения на малые возмущения и рассмотрением демпфирования или усиления отдельных собственных частот, см. [3].

Введем малые возмущения $u = u_0 - u'$ и $p = p_0 + p'$ и подставим в систему (1), (2) и вычтем невозмущенное решение:

$$\partial u' / \partial t + (u0, \nabla) u' + (u', \nabla) u0 + \nabla p' - R^{-1} \Delta u' = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot u' = 0. \tag{4}$$

Для краткости записи введем обозначения для частных производных $\partial_x(\cdot) := \partial(\cdot) / \partial x$ и компонент вектор-функции $u = \left(u_x, u_y, u_z\right)^T$. Система (3), (4) в явной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}\partial_t(u_x') + u_{0,x}\,\partial_x(u_x') + u_y'\,\partial_y\left(u_{0,x}\right) + \\ + u_z' \partial_z\left(u_{0,x}\right) + \partial_x p' - R^{-1} \Delta u_x' = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\partial_t(u_y') + u_{0,x}\,\partial_x(u_y') + \partial_y p' - R^{-1} \Delta u_y' = 0, \tag{6}$$

$$\partial_t(u_z') + u_{0,x}\,\partial_x(u_z') + \partial_z p' - R^{-1} \Delta u_z' = 0, \tag{7}$$

$$\partial_x(u_x') + \partial_y(u_y') + \partial_z(u_z') = 0. \tag{8}$$

Вначале рассмотрим случай $\boldsymbol{u}_0 = (R\,sin(y)\,, 0{,}0)^T$, когда уравнение (3) зависит только от координаты y. Давление исключается из полученной системы, применяя уравнение (8) к (5)-(7), получаем: $-\Delta p' = 2\ \partial_y\left(u_{0,x}\right) \partial_x\left(u_y'\right)$. Применим оператор Лапласа к уравнению (6) получим уравнение Орра – Зоммерфельда [3] на возмущение в направлении y:

$$\left(\left(\partial_t + u_{0,x}\,\partial_x\right)\Delta - \partial_{yy}\left(u_{0,x}\right)\partial_x - R^{-1}\Delta^2\right) v = 0, \tag{9}$$

где мы обозначили u_y' как v. Применим оператор ротора к (5)-(7) и воспользуемся выражением (8) для упрощения выражений вида $\partial_y\left(u_{0,x}\right)\partial_x(u_x') + \partial_y\left(u_{0,x}\right)\partial_y\left(u_y'\right)$. Для компоненты ротора в направлении y, обозначенного $\omega = \partial_z(u_x') - \partial_x(u_z')$, получим т.н. уравнение Сквайра [3]:

$$\left(\partial_t + u_{0,x}\,\partial_x - R^{-1}\Delta\right)\omega = -\,\partial_y\left(u_{0,x}\right)\partial_z(v). \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) определяют устойчивость базового аналитического решения. Будем предполагать, что их решение может быть разложено в ряд Фурье по тригонометрическим функциям в направлении x и z, тогда

$$\begin{aligned}v(t,x,y,z) = \eta(y)\exp(\lambda t + i\alpha k_x x + i k_z z), \\ \omega(t,x,y,z) = \nu(y)\exp(\lambda t + i\alpha k_x x + i k_z z),\end{aligned} \tag{11}$$

где k_x и k_z – волновые числа по соответствующим направлениям, а λ – комплексный показатель роста ($\mathcal{R}e(\lambda) < 0$) или демпфирования ($\mathcal{R}e(\lambda) > 0$) возмущений. Заметим, что $(k_x, k_z) = (0{,}0)$ исключается условием нулевого расхода через область. Подстановка (11) в (9) и (10) дает:

$$\begin{aligned}\Big(\left(\lambda + i\alpha k_x u_{0,x}\right)\left(-\alpha^2 k_x^2 + \partial_{yy} - k_z^2\right) - i\alpha k_x\,\partial_{yy}\left(u_{0,x}\right) \\ - R^{-1}\left(-\alpha^2 k_x^2 + \partial_{yy} - k_z^2\right)^2\Big)\eta(y) = 0\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\left(\lambda + i\alpha k_x u_{0,x} - R^{-1}\left(-\alpha^2 k_x^2 + \partial_{yy} - k_z^2\right)\right)\nu(y) = \\ = -i k_z\,\partial_y\left(u_{0,x}\right)\eta(y).\end{aligned} \tag{13}$$

В общем случае анализ (12) и (13) выполнить сложно, но можно рассмотреть некоторые характерные случаи.

1. Пусть $\eta(y)$ и $\nu(y)$ являются однородными функциями. Тогда решение может быть представлено как $u' = \left(c_1 \exp\left(i k_y y\right), 0, c_2 \exp\left(i k_y y\right)\right)^T$,

следовательно $\lambda = -1/Rk_y^2$ и решение является линейно устойчивым для любого значения R.

2. Если $v(y)$ не является однородной функцией, а функция $\eta(y)$ – является. Рассмотрим уравнение (13). Умножим (13) на сопряженную функцию $v(y)^*$ и проинтегрируем по области y от 0 до 2π и рассмотрим действительную часть интеграла:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}e(\lambda)|\nu|^2 dy =$$
$$= -\int_0^{2\pi}\left(R^{-1}(\alpha^2k_x^2+k_z^2)|\nu^2| + R^{-1}\left|\partial_{yy}(\nu)\right|^2\right)dy < 0.$$

Следовательно решение устойчиво для любых возмущений и любого значения R. Таким образом уравнение (13) можно исключить из рассмотрения и рассматривать только уравнение Орра-Зоммерфельда (12).

3. Если решение является не зависящим от направлений x и z, т.е. все $k_x = k_z = 0$ и тогда $\lambda = -1/Rk_y^2$. Решение линейно устойчиво для любого значения R.
4. Для нетривиального случая рассмотрим уравнение (12), умножим на сопряженную функцию $\eta(y)^*$, проинтегрируем по направлению y и рассмотрим действительную часть интеграла:

$$\mathcal{R}e(\lambda)(2\alpha^2k_x^2+2k_z^2-1)\int_0^{2\pi}\left|\partial_y(\eta)\right|^2 dy +$$
$$+\mathcal{R}e(\lambda)(2\alpha^2k_x^2+k_z^2-1)\int_0^{2\pi}(\alpha^2k_x^2+k_z^2)|\eta|^2 dy +$$
$$+\mathcal{R}e(\lambda)\int_0^{2\pi}\left|\partial_{yy}(\eta)\right|^2 dy =$$
$$= -R^{-1}(\alpha^2k_x^2+k_z^2-1)\int_0^{2\pi}\left|\left(\partial_{yy}-\alpha^2k_x^2-k_z^2\right)\eta\right|^2 dy -$$
$$-R^{-1}\int_0^{2\pi}\left|\partial_y\left(\left(\partial_{yy}-\alpha^2k_x^2-k_z^2\right)\eta\right)\right|^2 dy.$$

Введем некоторые обозначения для упрощения выражения:

$$A \triangleq \int_0^{2\pi}\left|\partial_y(\eta)\right|^2 dy,\ B \triangleq \int_0^{2\pi}(\alpha^2k_x^2+k_z^2)|\eta|^2 dy,$$
$$C \triangleq \int_0^{2\pi}\left|\partial_{yy}(\eta)\right|^2 dy,\ D \triangleq \int_0^{2\pi}\left|\left(\partial_{yy}-\alpha^2k_x^2-k_z^2\right)\eta\right|^2 dy,$$
$$F \triangleq \int_0^{2\pi}\left|\partial_y\left(\left(\partial_{yy}-\alpha^2k_x^2-k_z^2\right)\eta\right)\right|^2 dy$$

и заметим, что все эти слагаемые больше или равны 0.

В соответствии с теоремой Скваера [3] будем рассматривать только плоские возмущения ($k_z = 0$) как наиболее опасные с точки зрения потери устойчивости. Тогда:

$$\mathcal{R}e(\lambda) = \frac{-R^{-1}\left((\alpha^2k_x^2-1)D+F\right)}{(2\alpha^2k_x^2-1)A+(\alpha^2k_x^2-1)B+C}. \tag{14}$$

Для нарастания амплитуды необходимым условием является положительность правой части (14). Получаем, что самые неустойчивые возмущения являются длинноволновые возмущения с минимальными значениями $k_x > 0$. Отсюда следует доказательства.

Утверждение 1. *Пусть рассматривается задача (12) и (13) и пусть, по меньшей мере, функция $\eta(y)$ является неоднородной, $k_x \neq 0$. Тогда:*

1. *при $\alpha \geq 1$имеем линейно устойчивый случай для любых форм возмущений для любых значений R.*
2. *при $\alpha < 1$ возможна линейная потеря устойчивости, которая зависит от пространственной неоднородной формы $\eta(y)$ и от значения параметра R.*

Таким образом, для потери линейной устойчивости базового решения на $\boldsymbol{T}(\alpha)$ с $\alpha < 1$ необходимым условием является наложение возмущений максимальной длины волны (порядка размера области в направлении x) такое, чтобы функции были неоднородными. Дальнейший анализ устойчивости можно провести численно, рассмотрев уравнение Орра – Зоммерфельда (12) с применением, скажем, спектрального метода.

Теперь рассмотрим второй обобщенный случай для $\boldsymbol{u}_0 = \left(u_{0,}0{,}0\right)^T$, $u_0 = \frac{R}{2}sin(y)cos(z)$. Подобный анализ был проведен в работе [15], но в ней используется другой способ вывода уравнений на устойчивость малых возмущений и более подробное исследование.

В данном случае базовое решение не является плоскопараллельным (неоднородно в направлении y и z), что значительно усложняет вывод уравнений на возмущения. Действительно, рассмотрим систему (5)-(8). Давление может быть выражено как $-\Delta p' = 2\,\partial_y(u_0)\,\partial_x\left(u_y'\right) + 2\,\partial_z(u_0)\,\partial_x(u_z')\cdot$

Аналогично, применяя оператор Лапласа и рассматривая только уравнения (6) и (7) с использованием выражения (8), получим систему:

$$\begin{cases}(\partial_t\Delta - R^{-1}\Delta^2)u_y' - 2\partial_{yz}(u_0)\partial_x(u_z') \\ -2\partial_z(u_0)\partial_{xy}(u_z') - \partial_{yy}(u_0)\partial_x\left(u_y'\right) \\ +\partial_{zz}(u_0)\partial_x\left(u_y'\right) + u_0\Delta\left(\partial_x u_y'\right) + \\ 2\partial_z(u_0)\partial_{xz}\left(u_y'\right) = 0, \\ (\partial_t\Delta - R^{-1}\Delta^2)u_z' - 2\partial_{yz}(u_0)\partial_x\left(u_y'\right) \\ -2\partial_y(u_0)\partial_{xz}\left(u_y'\right) - \partial_{zz}(u_0)\partial_x(u_z') \\ +\partial_{yy}(u_0)\partial_x(u_z') + u_0\Delta(\partial_x u_z') + \\ 2\partial_y(u_0)\partial_{xy}(u_z') = 0.\end{cases} \tag{15}$$

Заметим, что в соответствии с Предложением 1 из работы [15], при анализе линейной устойчивости задачи, уравнение (5) можно не рассматривать, т.к. оно не влияет на неустойчивую часть спектра всей линейной задачи. Принципиальное отличие данной системы от уравнения Орра-Зоммерфельда (9) для плоскопараллельного базового течения заключается в том, что уравнение (15) является системой, в которой в качестве возмущения уже выступает не одно направление y, а две функции существенно зависящие от (y,z).

Аналогично, будем предполагать, что решения уравнений (15) могут быть разложены в ряд Фурье по тригонометрическим функциям в направлении x, тогда:

$$u'_{y(t,x,y,z)} = v(y,z)\exp(\lambda t + i\alpha k_x x),\; u'_{z(t,x,y,z)} = \\ = w(y,z)\exp(\lambda t + i\alpha k_x x). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим систему:

$$\begin{cases} \left(A\left(-\alpha^2 k_x^2 + \partial_{yy} + \partial_{zz}\right)\right)v \\ -i\alpha k_x \partial_{yy}(u_0)v + i\alpha k_x \partial_{zz}(u_0)v \\ +\left(2i\alpha k_x \partial_z(u_0)\partial_z + i\alpha k_x u_0\left(-\alpha^2 k_x^2 + \partial_{yy} + \partial_{zz}\right)\right)v \\ -\left(2i\alpha k_x \partial_{yz}(u_0) + 2i\alpha k_x \partial_z(u_0)\partial_y\right)w = 0, \\ \left(A\left(-\alpha^2 k_x^2 + \partial_{yy} + \partial_{zz}\right)\right)w \\ -i\alpha k_x \partial_{zz}(u_0)w + i\alpha k_x \partial_{yy}(u_0)w \\ \left(+2i\alpha k_x \partial_y(u_0)\partial_y + i\alpha k_x u_0\left(-\alpha^2 k_x^2 + \partial_{yy} + \partial_{zz}\right)\right)w \\ -\left(2i\alpha k_x \partial_{yz}(u_0) + 2i\alpha k_x \partial_y(u_0)\partial_z\right)v = 0, \\ A := \left(\lambda - R^{-1}\left(-\alpha^2 k_x^2 + \partial_{yy} + \partial_{zz}\right)\right). \end{cases} \quad (17)$$

Анализ данной системы невозможно выполнить аналогичным способом с нахождением уравнения на энергию возмущений. Действительно, первое уравнение системы (17) после умножения на сопряженную v^* и интегрирования по частям, можно записать как:

$$\lambda \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\alpha^2 k_x^2 + |\nabla v|^2\right)dydz = \\ = A + B + i[C] + D + i[E] + i[F] + G + H, \quad (18)$$

где

$$A := -R^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\alpha^2 k_x^2) + |\nabla v|^2 dydz,$$

$$B := -R^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Delta v|^2\, dydz,$$

$$C := \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha k_x\left(\partial_{yy}(u_0) - \partial_{zz}(u_0)\right)|v|^2 dydz,$$

$$D := -2i\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_z(u_0)v^*\,\partial_z(v)dydz,$$

$$E := \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha^3 k_x^3 u_0|v|^2\, dydz,$$

$$F := \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha k_x u_0|\nabla v|^2 dydz,$$

$$G := 2i\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha k_x\,\partial_{yz}(u_0)v^*\,wdxdy,$$

$$H := 2i\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha k_x \partial_z(u_0)v^*\partial_y w\, dxdy$$

Здесь квадратными скобками выделены чисто мнимые части, не играющие роль в росте или демпфировании возмущений. При этом невозможно сделать вывод о свойствах $\mathcal{R}e(\lambda)$ только на основе оставшихся членов уравнения. Аналогично можно сказать и про второе уравнение системы (17). Более того, уравнение (18) не позволяет сделать вывод о том, что наиболее опасной является первая гармоника возмущения (наиболее длинноволновые возмущения) по направлению x. Поэтому далее рассмотрим численное приближение обобщенной системы уравнений Орра-Зоммерфельда (17) и классического уравнения Орра-Зоммерфельда (12) с применением экспоненциально сходящегося спектрального метода.

1.2. Спектральный метод решения задачи на собственные значения

Будем решать задачу на собственные значения в классическом виде $\mathcal{A}h = \lambda h$, где линейный оператор $\mathcal{A}$ представлен бесконечномерными системами, полученными после дискретизации. Действительная часть полученных собственных значений будет определять линейную устойчивость задачи при вариации значений параметров. Для аппроксимации уравнений будем использовать собственные функции линейной части стационарных уравнения (3), представленных классическими тригонометрическими полиномами [18], т.е. в виде:

$$f(y,z) = \sum_{\{m,n\}\in Z^2\setminus\{0,0\}}\widehat{f_{m,n}}\,exp(imy + inz), \\ f(y) = \sum_{m\in Z\setminus\{0\}}\widehat{f_m}\,exp(imy),$$

где нулевые компоненты исключены условием нулевого расхода через область расчета.

Применим метод Бубнова-Галеркина к рассматриваемым задачам. Тогда линейный оператор (12) при условии $k_z = 0$ (как наиболее опасные возмущения по Утверждению 1) будет определен в форме:

$$\mathcal{A}(\eta) \triangleq i\alpha k_x(-\alpha^2 k_x^2 - m^2)\sum_{n\in Z\setminus\{0\}}\widehat{sin(y)}_n\,\widehat{\eta_{m-n}} + \\ = i\alpha k_x \sum_{n\in Z\setminus\{0\}}\widehat{sin(y)}_n\,\widehat{\eta_{m-n}} - R^{-1}(-\alpha^2 k_x^2 - m^2)^2\hat{\eta}_m = \\ = 0, \forall m \in Z\setminus\{0\}. \quad (19)$$

Свертка в выражениях возникает из-за произведения членов разложений с образом базового решения в пространстве базисных функций.

Решение задачи на собственные значения для системы (17) выполняется в блочной форме

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(v) + B(w) \\ C(v) + D(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где

$$a \triangleq \left(-R^{-1}(-\alpha^2 k_x^2 - m^2 - n^2)\right)(-\alpha^2 k_x^2 - m^2 - n^2)\hat{v}_{m,n} + \\ i\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}}\widehat{sin(y)\,cos(z)}_{l,q}\,\hat{v}_{l-m,q-n} - \\ - i\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}}\widehat{sin(y)\,cos(z)}_{l,q}\,\hat{v}_{l-m,q-n} -$$

$$
\begin{gathered}
-2\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\sin(y)\sin}(z)_{l,q}\,(q-n)\,\widehat{\hat{v}_{l-m,q-n}} + \\
i\alpha k_x(-\alpha^2 k_x^2 - m^2 - n^2) \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\sin(y)\cos}(z)_{l,q}\;\widehat{\hat{v}_{l-m,q-n}} + \\
+2i\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\cos(y)\sin}(z)_{l,q}\;\hat{w}_{l-m,q-n} + \\
+2\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\sin(y)\sin}(z)_{l,q}\,(l-m)\,\hat{w}_{l-m,q-n}\,,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
b \triangleq \left(-R^{-1}(-\alpha^2 k_x^2 - m^2 - n^2)\right)(-\alpha^2 k_x^2 - m^2 - n^2)\hat{w}_{m,n} + \\
i\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\sin(y)\cos}(z)_{l,q}\,\hat{w}_{l-m,q-n} - \\
- i\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\sin(y)\cos}(z)_{l,q}\,\hat{w}_{l-m,q-n} + \\
+2\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\cos(y)\sin}(z)_{l,q}\,(l-m)\,\hat{w}_{l-m,q-n} + \\
i\alpha k_x(-\alpha^2 k_x^2 - m^2 - n^2) \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\sin(y)\cos}(z)_{l,q}\;\hat{w}_{l-m,q-n} + \\
+2i\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\cos(y)\sin}(z)_{l,q}\;\hat{v}_{l-m,q-n} - \\
-2\alpha k_x \sum_{\{l,q\}\in Z^2\setminus\{0,0\}} \widehat{\cos(y)\cos}(z)_{l,q}\,(q-n)\,\hat{v}_{l-m,q-n} = 0\,, \\
\forall\{m,n\} \in Z^2\setminus\{0,0\}.
\end{gathered}
$$

Заметим, что для системы (20) возмущения при $k_x = 1$ уже не являются наиболее опасными, а зависят от сочетания α и k_x. Для решения данной задачи системы (19) и (20) переводятся в дискретную конечномерную форму. Количество базисных функций ограничивается на основе информации о затухании высокочастотных гармоник, аппроксимирующих собственные вектора. Из экспериментальных расчетов было установлено, что для $|m| < 16, |n| < 16$ достигается точность порядка 10^{-12}. Задача на собственные значения в дискретной форме решается численным методом.

Результаты построения нейтральных кривых для указанных систем с помощью метода бисекции представлены на рис. 1. Точность бисекции по параметру R составляла 10^{-6}.

Можно отметить, что для классической задачи, как указано в Утверждении 1, наиболее опасными являются длинноволновые возмущения при $k_z = 0$, $k_x = 1$. Для $\alpha = 1$ базовое решение является линейно устойчивым.

Для обобщенной задачи наблюдается интересный эффект. Во-первых, характер поведения кривой для $k_x = 1$ имеет вырожденный минимум $R_M \approx 3.91$ в окрестности α = ½, когда как для α → 0 наблюдается рост критического значения R. Такое поведение говорит о том, что для малых α, т.е. для сильно вытянутых областей, наиболее опасным с точки зрения потери устойчивости является не самое длинноволновое возмущение, а то, которое имеет частоту, период которой наиболее близок к 4π. Во-вторых, это означает, что минимальное значение в окрестности точки бифуркации для α < ½ является R_M. Поэтому для α ≤ ½ нейтральная кривая представляет собой огибающую всех нейтральных кривых при $k_x \in \mathbb{N}$, что и построено на рис.1, справа (жирная кривая). Для α > ½, поведение нейтральной кривой определяется наиболее длинноволновой гармоникой. По поведению нейтральной кривой можно отметить линейную устойчивость решений как минимум для всех $0 < R < 100$ при $\alpha = 1$.

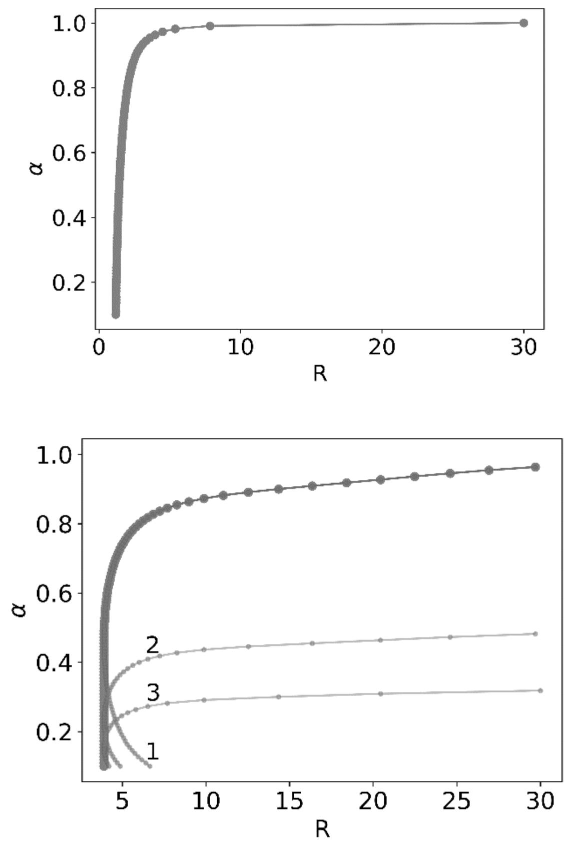

Рис.1. Нейтральные кривые линейной устойчивости классической (слева) и обобщенной (справа) трехмерной задачи А.Н. Колмогорова. Область, расположенная ниже нейтральной кривой, является областью линейной неустойчивости; область, расположенная выше кривой – область устойчивости. Кривые с числами справа соответствуют k_x = 1,2,3, жирная кривая – огибающая.

2. Численное исследование отсоединенных решений и хаотической динамики

Из полученных результатов можно ожидать сценарий нелинейного перехода к турбулентности при $\alpha = 1$. Для численного решения рассматривается дискретная задача (1), (2) в форме

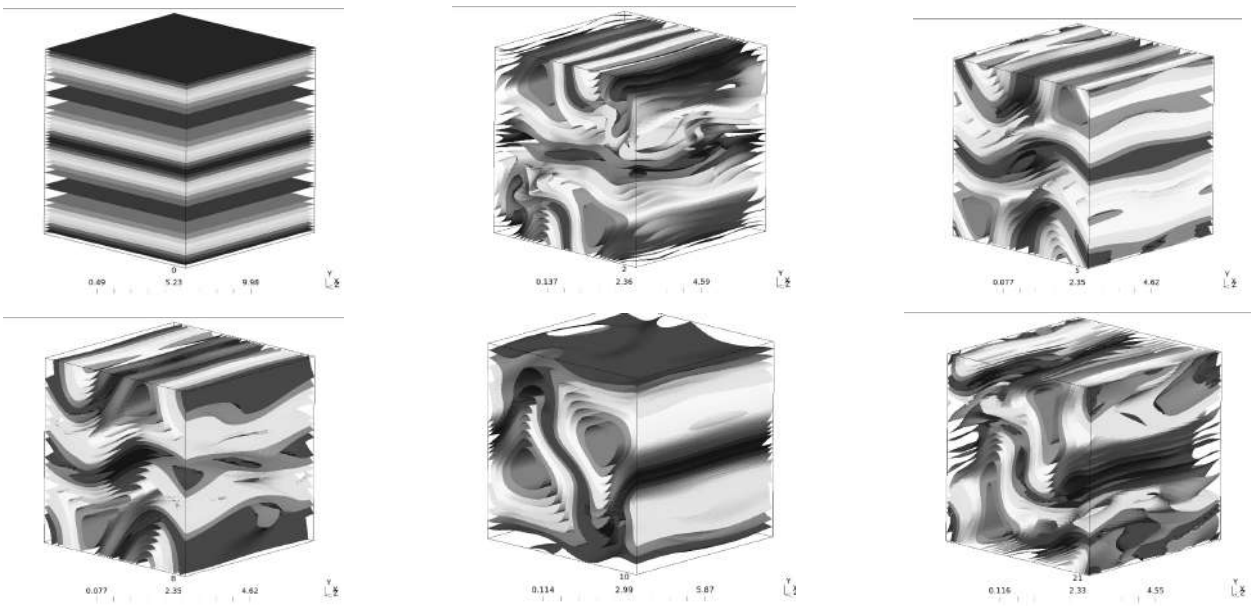

Рис.2. Базовое решение (сверху слева) и некоторые отсоединенные решения при $\alpha = 1$, R = 30. Классическая задача А.Н. Колмогорова (I). Изоповерхности модуля скорости

Громеки-Лэмба, для которой применяется псевдо-спектральный численный метод дискретизации, более детально см. [15]. В полу-дискретной по пространству форме решается следующая задача, в которой давление удаляется путем применения точного проектора:

$$\widehat{u_t} + F(\hat{u}, \alpha, R) \triangleq \widehat{u_t} + \mathcal{P}\big(\hat{u} \times \widehat{\omega(u)}\big) - R^{-1} L \hat{u} - \hat{\boldsymbol{f}} = 0, \quad (21)$$

где $\hat{u}$, $\widehat{\omega}$ – вектор-функции скорости и ротора в образе Фурье; L, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^T$ – операторы Лапласа, дивергенции и градиента в образе Фурье, соответственно; $\mathcal{P} = Id - \mathcal{B}^T L^{-1} \mathcal{B}$ – проектор Ляре [19]. Векторное произведение выполняется поточечно в физическом пространстве с применением процедуры удаления транспонирования частот (деалиасинг) по правилу 3/2 [20]. При необходимости интегрирования по времени используется экспоненциально-точный метод Рунге-Кутты 4 порядка по нелинейным членам и точный по линейным [21]. Для поиска отсоединенных стационарных решений применяется метод дефляции, который детально описан в [16].

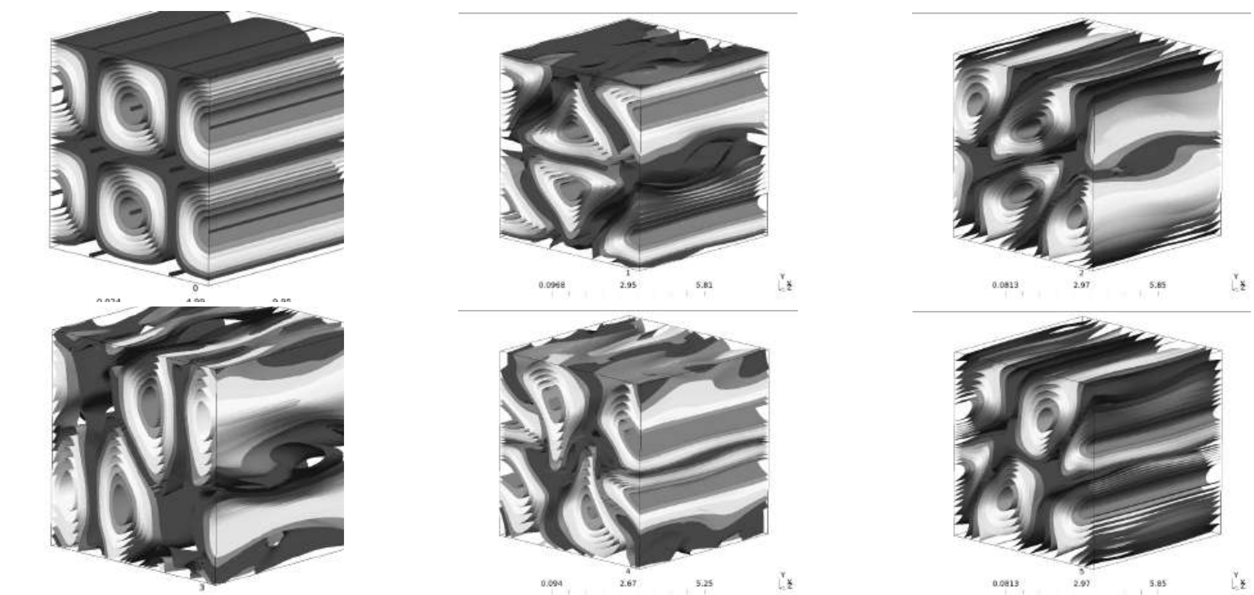

Рис.3. Базовое решение (сверху слева) и некоторые отсоединенные решения при $\alpha = 1$, R = 30. Обобщенная задача А.Н. Колмогорова (II). Изоповерхности модуля скорости

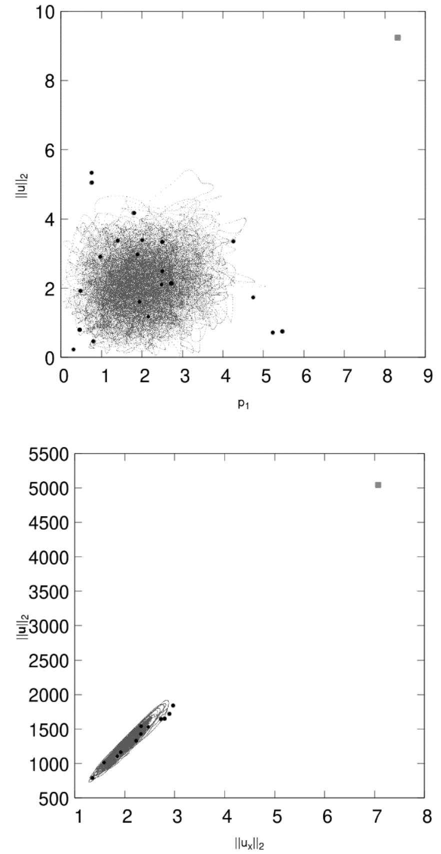

Рис.4. Нормы базового решения (прямоугольник) и отсоединенных решений (кружки) и динамика хаотического решения при $\alpha = 1$, R = 30. Классическая задача А.Н. Колмогорова. Функции на координатах: $||u||_2$-евклидовая норма решения, $||u_x||_2$-евклидовая норма компоненты x решения, p_1 – значение скорости в центральной точке области расчета, $||\boldsymbol{u}||_2$-евклидовая норма решения в образе Фурье

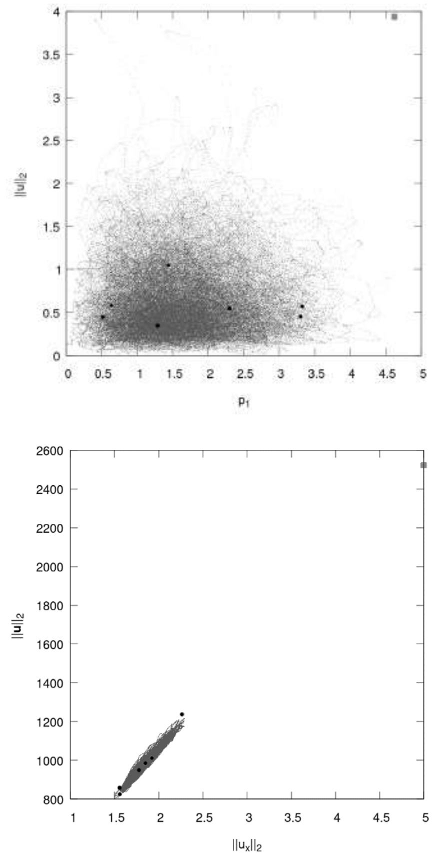

Рис.5. Нормы базового решения (прямоугольник) и отсоединенных решений (кружки) и динамика хаотического решения при $\alpha = 1$, R = 30. Обобщенная задача А.Н. Колмогорова. Функции на координатах: $||u||_2$-евклидовая норма решения, $||u_x||_2$-евклидовая норма компоненты x решения, p_1 – значение скорости в центральной точке области расчета, $||\boldsymbol{u}||_2$-евклидовая норма решения в образе Фурье

В качестве нелинейной задачи при поиске отсоединенных стационарных решений берется $F(\hat{u}, \alpha, R)$ из (21). Для поиска отсоединенных стационарных решений выбираются значения параметров $\alpha = 1$, $R = 30$, где гарантированно наблюдется линейная устойчивость базового решения для обоих задач. Дискретная система уравнений $F(\hat{u}, \alpha, R)$ содержит $3 \times 256 \times 256 \times 129 \sim 25$ млн степеней свободы.

В результате при $\alpha = 1$ и $R = 30$ было найдено (не считая базового решения) 22 стационарных отсоединенных решений для задачи (I) и 6 решений для задачи (II). Все указанные решения являются линейно неустойчивыми с размером неустойчивого многообразия от 2 до 6. Можно смело утверждать, что данные решения являются отсоединенными от ветви основного решения, поскольку базовое решение является линейно устойчивым для любых значений R в классической задаче и при $R < 100$ для обобщенной. Все эти решения ранее не были найдены и приводятся впервые. Некоторые из них вместе с базовыми приведены на рис. 2 для классической задачи и на рис. 3 – для обобщенной.

При моделировании динамики задачи в случае задания случайных начальных условий в большинстве случаев решение сводится к базовому. При старте с любого найденного отсоединенного стационарного решения динамика системы переходит в хаотическую. На рис. 4 и 5 приведены нормы отсоединенных стационарных решений (отмеченных точками) и динамика хаотического решения системы (21) для оценки влияния найденных решений на наблюдаемое хаотическое решение. Как видно из приведенных рисунков базовое решение отстоит далеко от наблюдаемой динамики, что обычно характеризуется субкритическим

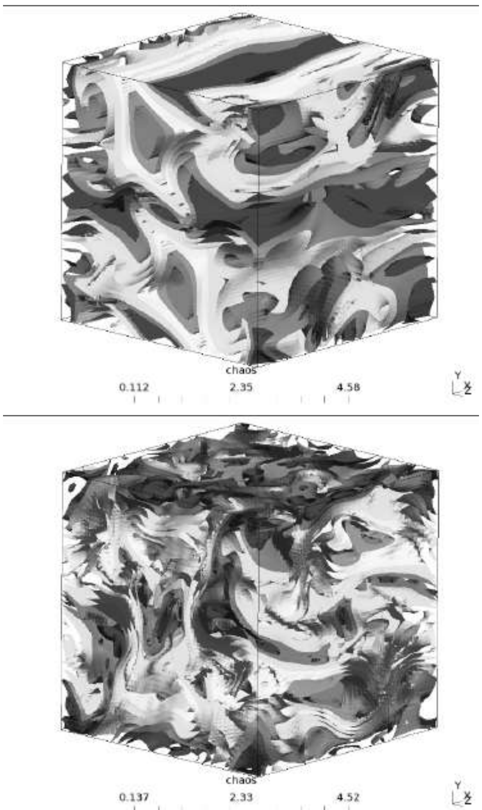

Рис.6. Хаотические решения для мгновенного момента времени при $\alpha = 1$, R = 30. Классическая задача (I) слева и обобщенная задача А.Н. Колмогорова (II) справа. Изоповерхности модуля скорости

и нелинейным типом бифуркаций. С другой стороны, практически все найденные отсоединенные решения являются так или иначе основой для наблюдаемой хаотической динамики, т.е. вероятность нахождения хаотической траектории в окрестности найденных отсоединенных решений является относительно высокой. Для визуального сравнения хаотических и отсоединенных решений на рис. 6 приведены мгновенные изоповерхности скорости для обоих задач. Отметим, что найденный режим хаотических решений не позволит провести анализ на основе изменения параметра, поскольку при уменьшении значения R решение может мгновенно перейти к базовому (ламинаризация), что похоже на режим течения в трубе для решения Пуазейля [13]. Один из возможных подходов в этом случае может быть модификация исходной системы уравнений для проведения регуляризации без мгновенной ламинаризации динамики.

Заключение

В результате был проведен анализ линейной устойчивости базовых решений в обоих постановках трехмерных задач А.Н. Колмогорова. Впервые была построена нейтральная кривая для этой обобщенной задачи, отвечающая вынуждающей силы в форме (II). Методом дефляции были найдены отсоединенные решения, которые определяют динамику хаотического решения в отдалении от базового. Эти решения были найдены впервые. Они выступают в роли особых точек, образующих, вероятно, гетероклинические контуры, в окрестности которых происходит развитие динамики системы. В отличие от работы [17], хаотические решения были найдены существенно раньше по значению числа Рейнольдса, что может говорить о наличии нескольких хаотических аттракторов в системе с их дальнейшим объединением. Данные факты требуют уточнения в дальнейших работах.

Литература

1. *Magnitskii N.A., Sidorov S.V.* New methods for chaotic dynamics. World Scientific. 2006. V. 58.
2. *Magnitskii N.A.* Universal bifurcation chaos theory and its new applications //Mathematics. 2023. V. 11. №. 11. P. 2536.
3. *Joseph D.D.* Stability of fluid motions I. Springer Science & Business Media. 2013. V. 27.
4. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems //Physics reports. 1979. V. 52. №. 5. P. 263-379.
5. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1995. V. 5. №. 2. P. 402-411.
6. *Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Y.M.* Numerical analysis of spatial hydrodynamic stability of shear flows in ducts of constant cross section //Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. V. 58. P. 700-713.
7. *Manneville P.* Understanding the sub-critical transition to turbulence in wall flows //Pramana. 2008. V. 70. P. 1009-1021.
8. *Sidorov N. et al.* Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Springer Science & Business Media. 2013. V. 550.
9. *Evstigneev N.M., Magnitskii N.A.* Numerical analysis of laminar–turbulent transition by methods of chaotic dynamics //Doklady Mathematics. Pleiades Publishing, 2020. V. 101. P. 110-114.
10. *Zakharov V.E., L'vov V.S., Falkovich G.* Kolmogorov spectra of turbulence I: Wave turbulence. Springer Science & Business Media, 2012.
11. *Dymov A.V., Kuksin S.B.* On the Zakharov–L'vov stochastic model for wave turbulence //Doklady

Mathematics. Pleiades Publishing. 2020. V. 101. P. 102-109.
12. *Arnol'd V.I., Khesin B.A.* Topological methods in hydrodynamics. New York : Springer. 2009. V. 19.
13. *Nikitin N.V.* Transition problem and localized turbulent structures in pipes //Fluid Dynamics. 2021. V. 56. No 1. P. 31-44.
14. *Meshalkin L.D., Sinai I.G.* Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous liquid //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1961. V. 25. No 6. P. 1700-1705.
15. *Evstigneev N.M., Magnitskii N.A., Ryabkov O.I.* Numerical bifurcation analysis in 3D Kolmogorov flow problem //Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. V. 8. No 4. P. 595-619.
16. *Evstigneev N.M.* On the convergence acceleration and parallel implementation of continuation in disconnected Bifurcation diagrams for large-scale problems // Communications in Computer and Information Science. 2019. V. 1063. P. 122-138.
17. *Van Veen L., Goto S.* Sub critical transition to turbulence in three-dimensional Kolmogorov flow //Fluid Dynamics Research. 2016. V. 48. No 6. P. 061425.
18. *Sadovnichii V.A.* Theory of operators. Springer Science & Business Media. 1991.
19. *Temam R.* Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis. American Mathematical Society. 2024. V. 343.
20. *Gottlieb D., Orszag S.A.* Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1977.
21. *Cox S.M., Matthews P.C.* Exponential time differencing for stiff systems //Journal of Computational Physics. 2002. V. 176. No 2. P. 430-455.

Евстигнеев Николай Михайлович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Ведущий научный сотрудник, кандидат технических наук. Область научных интересов: вычислительная математика, информационные технологии. E-mail: evstigneevnm@yandex.ru (ответственный за переписку).

Рябков Олег Игоревич. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: вычислительная математика, информационные технологии. E-mail: roi-techsup@yandex.ru

Disconnected solutions in generalized three dimensional A.N. Kolmogorov flow problems

N.M. Evstigneev, O.I. Ryabkov
Federal Research Center ''Computer Science and Control'' of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Abstract. This article considers analytical and numerical analysis of the stability of the classical and generalized Kolmogorov problem for the Navier-Stokes equations defined on a three-dimensional periodic stretched torus. In the work, a generalized form of the Orr-Sommerfeld equations is derived for the analysis of the linear stability of the main solution, and neutral curves are constructed. As a result of searching for disconnected solutions for the discrete problem, 22 disconnected solutions for the classical problem and 6 solutions for the generalized problem with linear stability of the basic solution are found. It is shown that the chaotic dynamics of the system for similar parameter values is determined by the found disconnected solutions.
Keywords: *linear stability analysis, Navier-Stokes equaitons, 3D Kolmogorov problem, disconnected solutions, pseudospectral method.*
DOI: 10.14357/20790279240401 **EDN:** GRWYTN

References

1. *Magnitskii N.A., Sidorov S.V.* New methods for chaotic dynamics. World Scientific. 2006. V. 58.
2. *Magnitskii N.A.* Universal bifurcation chaos theory and its new applications //Mathematics. 2023. V. 11. №. 11. P. 2536.
3. *Joseph D.D.* Stability of fluid motions I. Springer Science & Business Media. 2013. V. 27.
4. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems //Physics reports. 1979. V. 52. №. 5. P. 263-379.
5. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1995. V. 5. №. 2. P. 402-411.
6. *Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Y.M.* Numerical analysis of spatial hydrodynamic stability of shear flows in ducts of constant cross section //Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. V. 58. P. 700-713.
7. *Manneville P.* Understanding the sub-critical transition to turbulence in wall flows //Pramana. 2008. V. 70. P. 1009-1021.
8. *Sidorov N. et al.* Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Springer Science & Business Media. 2013. V. 550.
9. *Evstigneev N.M., Magnitskii N.A.* Numerical analysis of laminar–turbulent transition by methods of chaotic dynamics //Doklady Mathematics. Pleiades Publishing. 2020. V. 101. P. 110-114.
10. *Zakharov V.E., L'vov V.S., Falkovich G.* Kolmogorov spectra of turbulence I: Wave turbulence. Springer Science & Business Media. 2012.
11. *Dymov A.V., Kuksin S.B.* On the Zakharov–L'vov stochastic model for wave turbulence //Doklady Mathematics. Pleiades Publishing. 2020. V. 101. P. 102-109.
12. *Arnol'd V.I., Khesin B.A.* Topological methods in hydrodynamics. New York : Springer. 2009. V. 19.
13. *Nikitin N.V.* Transition problem and localized turbulent structures in pipes //Fluid Dynamics. 2021. V. 56. No 1. P. 31-44.
14. *Meshalkin L.D., Sinai I.G.* Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous liquid //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1961. V. 25. No 6. P. 1700-1705.
15. *Evstigneev N.M., Magnitskii N.A., Ryabkov O.I.* Numerical bifurcation analysis in 3D Kolmogorov flow problem //Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. V. 8. No 4. P. 595-619.
16. *Evstigneev N.M.* On the convergence acceleration and parallel implementation of continuation in disconnected Bifurcation diagrams for large-scale problems // Communications in Computer and Information Science. 2019. V. 1063. P. 122-138.
17. *Van Veen L., Goto S.* Sub critical transition to turbulence in three-dimensional Kolmogorov flow //Fluid Dynamics Research. 2016. V. 48. №. 6. P. 061425.
18. *Sadovnichii V.A.* Theory of operators. Springer Science & Business Media. 1991.
19. *Temam R.* Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis. American Mathematical Society. 2024. V. 343.
20. *Gottlieb D., Orszag S.A.* Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1977.
21. *Cox S.M., Matthews P.C.* Exponential time differencing for stiff systems //Journal of Computational Physics. 2002. V. 176. No 2. P. 430-455.

Evstigneev N.M., PhD, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, lead staff scientist. Scientific interests: computational and applied mathematics, computer sciences. E-mail: evstigneevnm@yandex.ru corresponding author.

Ryabkov O.I., PhD, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, staff scientist. Scientific interests: computational and applied mathematics, computer sciences. E-mail: roi-techsup@yandex.ru