

Обработка и анализ изображений и сигналов

Цветовые системы координат: теоретические пределы равноконтрастности

Я.В. Богданов^{I,II}, С.А. Гладилин^I, И.А. Коноваленко^{I,III}

^I Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва, Россия

^{II} Московский физико-технический институт (НИУ), г. Долгопрудный, Россия

^{III} Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. Работа посвящена анализу теоретических пределов равноконтрастности цветовых систем координат в общем случае. Доказаны теоремы, показывающие, что в общем случае нельзя гладким преобразованием пространства с метрическим тензором сделать его постоянным и получить внутреннюю метрику из не внутренней, однако его двумерное подпространство всегда можно сделать изотропным. Отсюда следует, что в общем случае построение равноконтрастного цветового пространства невозможно. В то же время доказанные теоремы не противоречат построению приблизительно равноконтрастных цветовых пространств, используемых на практике.

Ключевые слова: перцептивная однородность, цветовое пространство, цветовое расстояние, преобразования пространства, метрический тензор.

DOI: 10.14357/20790279240405 **EDN:** SYEOKX

Введение

Свет, попадая на сетчатку человеческого глаза, воспринимается как имеющий тот или иной цвет. Экспериментально показано, что даже свет совершенно разного спектрального состава может вызывать идентичные зрительные ощущения, то есть иметь один и тот же цвет. Это явление называется *метамерией*. Таким образом, пространство всевозможных цветов, видимых человеком, (*цветовое пространство*) можно рассматривать как фактор-пространство над пространством излучений всевозможных спектральных составов. Экспе-

риментальные исследования, начатые Грассманом, показывают, что цветовое пространство человека представляет собой конус в трехмерном векторном пространстве [1]. Среди различных систем координат, которые могут быть введены в цветовом пространстве (*цветовых координат*), особое место занимают *равноконтрастные*. Равноконтрастные системы цветовых координат (РСЦК) моделируют различение цветов человеком так, чтобы евклидово расстояние между парами точек (цветов) было пропорционально воспринимаемой человеком величине различия между этими цветами.

Особенность цветоразличения человека – наличие порога чувствительности: излучения очень близкого спектрального состава (или метамеричные им). При одновременном или попеременном предъявлении наблюдателю эти излучения возможны: если излучение А близко до степени неразличимости излучению В, а В – излучению С, то С может оказаться различимо с А. Мало того, для любой пары близких до степени неразличимости излучений А и В можно найти такое излучение С, что оно неразлично с одним из пары (либо А, либо В), но различимо с другим. Экспериментально показано существование порогов цветоразличения: цвета, отличающиеся от заданного цвета А менее чем на порог (т.е. лежащие внутри шара в цветовом пространстве с центром в А) оказываются неразличимы с А. Размер этого порога задает естественную единицу измерения в цветовом пространстве JND (от англ. just noticeable difference – чуть заметное различие).

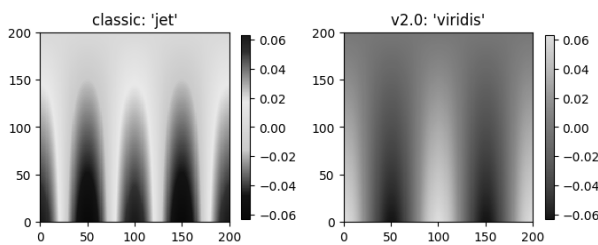


Рис. 1. Пример использования равноконтрастных цветовых палитр при визуализации

В идеальной РСЦК евклидово расстояние, соответствующее JND, одинаково во всех точках пространства и направлениях, то есть соответствующее координатное пространство однородно и изотропно. Модели РСЦК имеют широкое применение. Равноконтрастность системы координат обеспечивает возможность равномерного перехода между цветами, что, например, необходимо при использовании цветовых шкал для визуализации данных (рис. 1), оценивать яркость цвета и т.д. Различные методы сжатия и обработки спроектированы так, чтобы формировать изображения с ограниченной ошибкой в координатном обозначении цвета, поэтому их работа в РСЦК обеспечивает малую погрешность самих цветов.

В равноконтрастном цветовом пространстве можно решать задачу регрессии для нахождения модели, приближающей (в смысле восприятия человеком) исходные данные [2]. Так, регрессия активно используется в машинном обучении. Например, для построения сжимающих автоэнкодеров необходимо минимизировать изменение цветов сжимаемого изображения.

Стандартная линейная система цветовых координат CIE XYZ покрывает цветовое пространство, но она не была задумана как пространство с равномерной евклидовой метрикой [3].

Альберт Манселл первым предложил подход, при котором яркость, цветовой тон и насыщенность представлялись как независимые направления в цветовом пространстве. В атласе Манселла представлена трехмерная дискретная сетка цветов цилиндрического вида, в которой различия между соседними цветами воспринимаются человеком как равные. Серьезный недостаток системы Манселла, впервые предложенной в 1905 – дискретность представления цветов [4].

В 1948 году Ричард Хантер предложил РСЦК Hunter Lab [5], позже Дэвид МакАдам – систему координат на основе исследования Дина Джадда [6]. В 1960 году она была стандартизирована международной комиссией по освещению CIE (Commission internationale de l'éclairage) и названа CIE 1960 UCS. Эта система координат не включала яркостную составляющую. Вскоре после этого на основе CIE 1960 UCS Гюнтер Вышецкий создал CIE 1964 (U^* , V^* , W^*) (также известную как CIEUVW), учитывающую яркостную компоненту цвета [7]. В 1976 году на базе Hunter Lab была разработана модель CIELAB, которая в дальнейшем стала наиболее известной равноконтрастной системой цветовых координат [8].

С использованием координат CIELAB была создана формула CEIDE2000, которая наилучшим образом описывает малые цветовые различия [9,10]. Единица измерения CEIDE2000 соответствует порогу цветоразличения JND.

В настоящее время системы цветовых координат на основе модели цветовосприятия CAM16 (CAM16-SCD, CAM16-UCS) считаются наиболее точными моделями среди тех, в которых L2-метрика описывает воспринимаемое различие пары цветов [11]. В 2017 году был создан proLab [12]. Хотя он и уступает CAM16-UCS в перцептивной равномерности, преобразования между proLab и CIE XYZ сохраняют линейность многообразий и легко вычисляются, а гетероскедастичность дробового шума в proLab меньше, чем в CAM16-UCS и стандартных цветовых пространствах.

Если в некотором цветовом пространстве определены отдельно координаты цветности и яркости, то будем называть цветностными пространствами сечения цветового пространства плоскостями постоянной яркости с метрикой исходного пространства. Также цветностным пространством может быть названа система из двух цветностных координат цветового пространства, если она имеет какую-то разум-

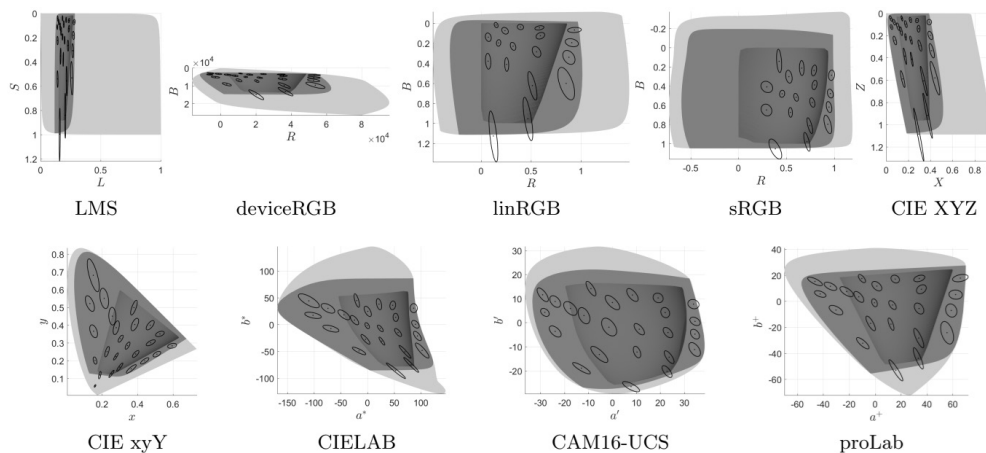


Рис. 2. Эллипсы МакАдама на сечениях цветовых пространств плоскостями яркости $L^* = 50$. Гамма дисплея sRGB показана соответствующими цветами (темно-серым в ч/б); гамма источника света D65 и остальные цвета показаны серым и светло-серым цветом соответственно [12,13]

ной метрику (например, метрика ρ , если расстояние между цветами яркости L и цветностей a_1, b_1 и a_2, b_2 можно факторизовать как $f(L) \cdot \rho((a_1, b_1), (a_2, b_2))$). Также все результаты работы будут относиться к двумерному цветовому пространству дальтоников.

Исследование свойств цветностных координат в отдельности полезно по ряду причин. Во-первых, свойства РСЦК, такие как, например, перцептивно равномерный переход между цветами одинаковой яркости и сбалансированное распределение цветностей, являются свойствами их цветностных координат. Во-вторых, если некоторое цветностное пространство системы цветовых координат неравномерно, то эта система также не является равномерной.

На основе метрики в цветностном пространстве может быть задан метрический тензор. Визуализацией метрического тензора могут служить эллипсы МакАдама, заданные на плоскости цветности (рис. 2) [12]. Они были задуманы для визуализации порога цветоразличения, но увеличены в несколько раз, чтобы были видны. Эллипсы являются окружностями в пространстве в приближении, что метрический тензор в пределах эллипса почти постоянен. Если пространство цветностей изотропно, то его метрический тензор – скалярный, а эллипсы МакАдама в нем являются окружностями. В однородном пространстве метрический тензор постоянен и эллипсы МакАдама одинаковы во всех точках (рис. 3). Однородность здесь и далее предполагается в узком смысле – относительно группы трансляций. Заметим, что даже если исходная метрика не внутренняя, изотропность пространства равносильна скалярности тензора, а из непостоянства метрического тензора следует неоднородность пространства.

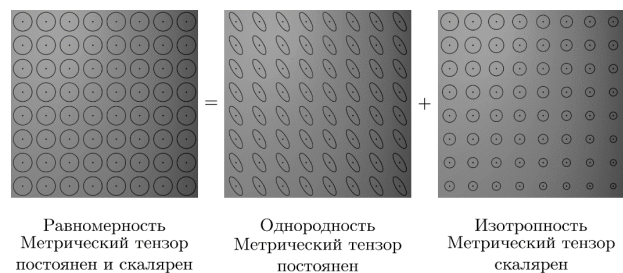


Рис. 3. Визуальные признаки свойств метрического тензора на примере эллипсов МакАдама

Таким образом, равномерное цветностное пространство важно. Однако большинство исследований относится к созданию новых цветовых пространств и их практическому применению. В литературе мало уделено внимания анализу теоретических пределов равномерности хроматической системы координат. Такому анализу и посвящена настоящая работа.

1. Скаляризация метрического тензора в $\mathbb{R}^2$

В данном разделе мы докажем, что всегда можно так преобразовать плоскость, что метрический тензор на ней станет скалярным. Тогда координатное пространство будет изотропным. Это значит, что возможно преобразовать пространство так, что эллипсы МакАдама в каждой точке стали окружностями. Углы в этом пространстве будут заданы как в евклидовом, но геодезические линии в общем случае будут гладкими кривыми и угловой дефект может быть ненулевым.

Лемма 1. Дифференцируемость комплексного решения задачи Коши с вещественной переменной по комплексному параметру.

Пусть задана $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Если $f(x, y, \mu), \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial \mu}, \frac{\partial y_0(\mu)}{\partial \mu_k}$

непрерывны, то решение $\phi(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} y_\mu(x)$ задачи Коши с параметром $\mu \in \mathbb{C}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \quad y(0) = y_0(\mu)$$

непрерывно дифференцируемо по параметру μ .

Доказательство. Воспользуемся дифференцируемостью решения задачи Коши по параметрам.

Пусть задана $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Если $\vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu}), \frac{\partial \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu})}{\partial y_k}, \frac{\partial \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu})}{\partial \mu_k}, \frac{\partial \vec{y}_0(\vec{\mu})}{\partial \mu_k}$

непрерывны, то для решения $\vec{\phi}(x, \vec{\mu}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{y}_\mu(x)$ задачи Коши

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu}), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0(\vec{\mu})$$

выполнено следующее:

$$\vec{z}_k(x, \vec{\mu}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_k} \text{ непрерывны;}$$

смешанные производные $\frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial x \partial \mu_k}$ непрерывны и не

зависят от порядка дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{z}_k}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \mu_k} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} = \frac{d\vec{f}(x, \vec{\phi}(x, \vec{\mu}), \vec{\mu})}{d\mu_k} = \\ &= \frac{\partial \vec{f}(x, \vec{\phi}(x, \vec{\mu}), \vec{\mu})}{\partial \vec{y}} \cdot \vec{z}_k + \frac{\partial \vec{f}(x, \vec{\phi}(x, \vec{\mu}), \vec{\mu})}{\partial \mu_k} \end{aligned}$$

Применим ее к функции $f(x, y, \mu): \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. При этом будем воспринимать y, μ, f как двумерные векторы над $\mathbb{R}$ ($y = y_r + iy_i, \mu = \mu_r + i\mu_i, f = f_r + if_i$).

Если $f(x, y, \mu), \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial \mu}, \frac{\partial y_0(\mu)}{\partial \mu_k}$

непрерывны, то для решения $\phi(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} y_\mu(x)$ задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \quad y(0) = y_0(\mu)$$

выполнено следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \mu_k} &= \frac{\partial}{\partial \mu_k} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{df(x, \phi(x, \mu), \mu)}{d\mu_k} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mu_k} \frac{\partial f(x, \phi(x, \mu), \mu)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, \phi(x, \mu), \mu)}{\partial \mu_k}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu_i} - i \frac{\partial \phi}{\partial \mu_r} \right) &= \frac{\partial f(x, \phi(x, \mu), \mu)}{\partial \mu_i} - i \frac{\partial f(x, \phi(x, \mu), \mu)}{\partial \mu_r} + \\ &+ \frac{\partial f(x, \phi(x, \mu), \mu)}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu_i} - i \frac{\partial \phi}{\partial \mu_r} \right) = \frac{\partial f(x, \phi(x, \mu), \mu)}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu_i} - i \frac{\partial \phi}{\partial \mu_r} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi(0, \mu)}{\partial \mu_i} - i \frac{\partial \phi(0, \mu)}{\partial \mu_r} = \frac{\partial y_0(\mu)}{\partial \mu_i} - i \frac{\partial y_0(\mu)}{\partial \mu_r} = 0.$$

Следовательно $\frac{\partial \phi}{\partial \mu_i} = i \frac{\partial \phi}{\partial \mu_r}$. Это значит, что ϕ дифференцируемо по μ в комплексном смысле.

Теорема 1. Возможность скаляризации метрического тензора.

Пространство $\mathbb{R}^2$ с заданным бесконечно дифференцируемым метрическим тензором g всегда можно обратимо непрерывно дифференцируемо преобразовать так, чтобы метрический тензор стал скалярным:

$$\forall g \exists f \exists s: (\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1} = sI,$$

где $\vec{f}$ – обратимое непрерывно дифференцируемое преобразование, $\nabla \vec{f}$ – матрицу Якоби функции $\vec{f}$, $(\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1}$ – новый метрический тензор, s – скалярная функция.

Доказательство. Метрический тензор пространства после преобразования $\vec{f}$ равен g^* :

$$g^* = (\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1}.$$

Метрический тензор в заданной точке – симметричная положительно определенная матрица. Поэтому для нее существует разложение Холецко-го: $g = LL^T$, где L – невырожденная матрица.

Так как L не вырождена, l_{11} и l_{22} больше 0, то

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{g_{11}}, \quad l_{12} = 0, \quad l_{21} = \\ &= g_{12}/l_{11}, \quad l_{22} = \sqrt{g_{22}^2 - l_{21}^2}. \end{aligned}$$

Так как элементы g бесконечно дифференцируемы, $l_{11} > 0$ и $l_{22} > 0$, элементы L также бесконечно дифференцируемы.

Подставляя $g = LL^T$, получим:

$$\begin{aligned} g^* &= (\nabla \vec{f}^{-1})^T (LL^T) \nabla \vec{f}^{-1} = \\ &= (L^T \nabla \vec{f}^{-1})^T L^T \nabla \vec{f}^{-1}. \end{aligned}$$

Если в заданной точке $L^T \nabla \vec{f}^{-1}$ – произведение положительного числа s^{-1} и матрицы поворота Q^T , то g^* – скалярная матрица:

$$g^* = (L^T \nabla \vec{f}^{-1})^T L^T \nabla \vec{f}^{-1} =$$

$$= (s^{-1} Q^T)^T s^{-1} Q^T = s^{-2} Q Q^T = s^{-2} I.$$

Для любой матрицы поворота Q верно: $q_{11} = q_{22}, q_{12} = -q_{21}$. Обозначим:

$$\begin{aligned} c_1 &\stackrel{\text{def}}{=} s q_{11} = s q_{22}, \quad c_2 \stackrel{\text{def}}{=} s q_{12} = \\ &= -s q_{21}, \quad C \stackrel{\text{def}}{=} s Q = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Области определения функций $GL(n)$ – множество обратимых матриц $n \times n$, $SO(n)$ – мно-

жество ортогональных матриц $n \times n$ с определителем 1):

$$\begin{aligned} \vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow GL(2), \quad L: \mathbb{R}^2 \rightarrow GL(2), \quad s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \\ Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow SO(2), \quad C: \mathbb{R}^2 \rightarrow GL(2), \quad c_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad c_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Перепишем условие на преобразование $\vec{f}$:

$$\begin{aligned} L^T \nabla \vec{f}^{-1} &= s^{-1} Q^{-1} \Rightarrow \nabla \vec{f} = \\ &= ((L^T)^{-1} s^{-1} Q^{-1})^{-1} = s Q L^T = C L^T. \end{aligned}$$

Примем:

$$l_1 \stackrel{\text{def}}{=} l_{11} + i l_{12}, \quad l_2 \stackrel{\text{def}}{=} l_{21} + i l_{22}, \quad c \stackrel{\text{def}}{=} c_1 - i c_2.$$

Равенство переходит к виду:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{f} &= C L^T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 l_{11} + c_2 l_{12} & c_1 l_{21} + c_2 l_{22} \\ -c_2 l_{11} + c_1 l_{12} & -c_2 l_{21} + c_1 l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(c l_1) & \operatorname{Re}(c l_2) \\ \operatorname{Im}(c l_1) & \operatorname{Im}(c l_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица L разложения Холецкого g не вырождена, поэтому l_1 и l_2 отличны от нуля. l_1 и l_2 бесконечно дифференцируемы и $l_2 \neq 0$, значит

функция $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -l_1(x, y)/l_2(x, y)$ также бесконечно дифференцируема. Аналитически продолжим функцию d .

Определим задачу Коши с переменной $x \in \mathbb{R}$ и параметром $z \in \mathbb{C}$:

$$Y' = d(x, Y), \quad Y(0) = z.$$

Задачи Коши имеют решения $Y(x, z): \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Согласно Лемме 1 решение Y будет комплексно дифференцируемым по z .

Предположим, что два различных решения задачи Коши пересекаются, то есть существуют x, z_1, z_2 такие, что $z_1 \neq z_2$ и $Y(x, z_1) = Y(x, z_2) = y_1$. Значит, задача Коши $Y' = d(x, Y)$, $Y(x) = y_1$ имеет по крайней мере два решения Y_1 и Y_2 отличные при $x = 0$. Противоречие.

Значит, при любом фиксированном x функция l_1 и Y обратима. Определим z как обратную функцию к Y при фиксированном x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{C}: y = Y(x, z(x, y)).$$

Величины x и y – независимые переменные, согласно определению $z(x, y)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dy}{dx} = \frac{dY(x, z(x, y))}{dx} = \frac{\partial Y(x, z(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, z(x, y))}{\partial z} \frac{dz(x, y)}{dx} = \\ &= -\frac{l_1(x, y)}{l_2(x, y)} + \frac{\partial Y(x, z(x, y))}{\partial z} \frac{dz(x, y)}{dx}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{l_1(x, y)}{l_2(x, y)} \left(\frac{\partial Y(x, z(x, y))}{\partial z} \right)^{-1}.$$

Заметим, что $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ непрерывна. Согласно определению $z(x, y)$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dy}{dx} = \frac{dY(x, z(x, y))}{dx} = \\ &= \frac{\partial Y(x, z(x, y))}{\partial z} \frac{dz(x, y)}{dx} = \\ &= \frac{\partial Y(x, z(x, y))}{\partial z} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial Y(x, z(x, y))}{\partial z} \right)^{-1}.$$

Заметим, что $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ непрерывна. Параметр $z(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Из этих равенств также следует, что $\frac{\partial y}{\partial z} \neq 0$.

Примем $c = \left(l_2 \frac{\partial Y(x, z(x, y))}{\partial z} \right)^{-1}$, тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = c l_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = c l_2.$$

Искомое преобразование f определяется функцией z :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix}.$$

Так как $z(x, y)$ – непрерывно дифференцируема, f также непрерывно дифференцируема.

2. Отсутствие координатного пространства $\mathbb{R}^2$ с внутренней метрикой

Следующая теорема доказывает, что если в исходном пространстве не может быть определен метрический тензор или он не задает исходную метрику, то это нельзя исправить никаким гладким преобразованием.

Теорема 2. Если пространство не имеет внутренней метрики, то не существует гладкого обратного преобразования в пространство с внутренней метрикой.

В пространстве с метрическим тензором g длина кривой γ можно найти по формуле:

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{d\vec{r}^T g(\vec{r}) d\vec{r}}.$$

Метрика ρ на пространстве X называется внутренней, если для любых двух точек $x, y \in X$ расстояние между ними определяется формулой:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \inf_{\gamma \in \gamma(\vec{x}, \vec{y})} L(\gamma),$$

где $\gamma(\vec{x}, \vec{y})$ – пути, соединяющие точки $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Доказательство. Предположим существует пространство с вннутренней метрикой ρ и гладкое преобразование f такое, что в новом пространстве метрика ρ^* вннутренняя.

Обозначим метрический тензор в новом пространстве g^* . Метрика ρ вннутренняя:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho^*(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) = \inf_{\gamma^* \in \gamma^*(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y}))} \int_{\gamma^*} \sqrt{d\vec{r}^{*T} g^*(\vec{r}^*) d\vec{r}^*} =$$

$$= \inf_{\gamma \in \gamma(\vec{x}, \vec{y})} \int_{\gamma} \sqrt{d\vec{f}(\vec{r})^T g^*(\vec{f}(\vec{r})) d\vec{f}(\vec{r})} = \inf_{\gamma \in \gamma^*(\vec{x}, \vec{y})} \int_{\gamma} \sqrt{d\vec{r}^T (\nabla \vec{f})^T g^* \nabla \vec{f} d\vec{r}}.$$

В старом пространстве также существует метрический тензор, который определяется по формуле:

$$g = (\nabla \vec{f})^T g^* \nabla \vec{f},$$

Противоречие: предположение неверно.

3. Условие существования координатного пространства $\mathbb{R}^2$ с постоянным скалярным тензором

Следующая теорема доказывает критерий существования гладкого преобразования из пространства со скалярным метрическим тензором в однородное изотропное пространство. Из него следует, что не всегда возможно преобразовать пространство так, чтобы эллипсы в каждой точке стали одинаковыми окружностями.

Теорема 3. Критерий существования преобразования скалярного метрического тензора в скалярный и постоянный.

Пространство $\mathbb{R}^2$ с заданным скалярным бесконечно дифференцируемым метрическим тензором g можно обратимо непрерывно дифференцируемо преобразовать так, чтобы метрический тензор стал равен константной скалярной матрице, если и только если $\ln(g)$ – гармоническая функция:

$$\exists f \exists c: (\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1} = cI \Leftrightarrow \Delta \ln(g) = 0,$$

где $\vec{f}$ – обратимое непрерывно дифференцируемое преобразование $M \subset \mathbb{R}^2$, $(\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1}$ – новый метрический тензор, c – число.

Доказательство. Перепишем условие равномерности пространства. Переобозначив $\sqrt{c}f$ как f , избавимся от c :

$$(\nabla \vec{f} / \sqrt{g})^T \nabla \vec{f} / \sqrt{g} = I.$$

Таким образом $\nabla \vec{f} / \sqrt{g}$ – скалярная матрица. Определитель $\nabla \vec{f} / \sqrt{g}$ непрерывен, поэтому он либо везде равен 1, либо везде равен -1. Отражением одной координаты f можно добиться, чтобы определитель был равен 1.

Получилось условие равносильное существованию преобразования в равномерное пространство:

$$\exists f \exists c: (\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1} = cI \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists f \exists q_1 \exists q_2: \nabla \vec{f} = \sqrt{g} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 \end{pmatrix} \wedge q_1^2 + q_2^2 = 1),$$

где q_1 и q_2 – скалярные функции.

Функция f комплексно дифференцируема:

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = q_1 \sqrt{g} = \frac{\partial f_y}{\partial y} \wedge \frac{\partial f_y}{\partial x} = -q_2 \sqrt{g} = -\frac{\partial f_x}{\partial y}$$

Перепишем условие, используя комплексные числа:

$$(\exists f \exists q: f' = q\sqrt{g} \wedge |q| = 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists f: |f'| = \sqrt{g} \Leftrightarrow \exists f: \operatorname{Re}(2\operatorname{Ln}(f')) = \operatorname{Ln}(g),$$

где $q = q_1 - iq_2$ – комплексная функция.

Величина f' – обратимая комплексно дифференцируемая функция, значит, $f' \neq 0$ и $2\operatorname{Ln}(f')$ имеет ветвь в виде комплексно дифференцируемой функции. Существование обратимой комплексно дифференцируемой функции f равносильно существованию комплексно дифференцируемой функции $h = 2\operatorname{Ln}(f')$:

$$\exists f: \operatorname{Re}(2\operatorname{Ln}(f')) = \operatorname{Ln}(g) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists h: (\operatorname{Re}(h) = \operatorname{Ln}(g) \wedge \Delta h' = 0).$$

Комплексно дифференцируемая функция $h(z)$ с заданной вещественной частью $\operatorname{r}(z)$ существует в том и только в том случае, если заданная вещественная часть является гармонической функцией.

Необходимость гармоничности $\operatorname{Re}(h)$:

$$\Delta \operatorname{Re}(h(x + iy)) =$$

$$= \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2 \partial x} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 h_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 h_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 h_y}{\partial x \partial y} = 0.$$

Достаточность.

$\frac{\partial r(x+iy)}{\partial x} + i \frac{\partial r(x+iy)}{\partial y}$ – комплексно дифференцируемо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r(x + iy)}{\partial x} + i \frac{\partial r(x + iy)}{\partial y} \right) =$$

$$= -\frac{\partial^2 r(x + iy)}{\partial y \partial y} + i \frac{\partial^2 r(x + iy)}{\partial x \partial y} =$$

$$= i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r(x + iy)}{\partial x} + i \frac{\partial r(x + iy)}{\partial y} \right).$$

Параметр h можно определить как интеграл

функции $\frac{\partial r}{\partial x} + i \frac{\partial r}{\partial y}$:

$$h(w) = r(0) + \int_0^w \left(\frac{\partial r}{\partial x} + i \frac{\partial r}{\partial y} \right) (z) dz.$$

Тогда, вещественная часть h совпадает с r :

$$\left(Re(h(0)) = r(0) \wedge \frac{\partial Re(h)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial Re(h)}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow Re(h) = r.$$

Таким образом существование преобразования равносильно гармоничности $ln(g)$.

4. Отсутствие координатного пространства $\mathbb{R}^2$ с постоянным тензором

Следующая теорема доказывает, что в общем случае нельзя получить гладким преобразованием из пространства с метрическим тензором однородное пространство. Это значит, что нельзя преобразовать пространство даже так, что эллипсы в каждой точке стали одинаковыми.

Хотя теорема не относится именно к цветностному пространству, она налагает ограничение на существование РСЦК – цветностное пространство должно иметь нулевую кривизну. С другой стороны, не исключено, что цветностное пространство можно преобразовать в пространство со сколь угодно малой максимальной невязкой метрического тензора и единичной матрицы.

Теорема 4. Отсутствие преобразования метрического тензора в постоянный в общем случае.

Выпуклую область $M \subset \mathbb{R}^2$ с заданным бесконечно дифференцируемым метрическим тензором g не всегда можно обратимо непрерывно дифференцируемо преобразовать так, чтобы метрический тензор стал равен константной матрице:

$$\exists g \forall f \forall C: (\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1} \neq C,$$

где $\vec{f}$ – обратимое непрерывно дифференцируемое преобразование $M \subset \mathbb{R}^2$, $(\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1}$ – новый метрический тензор, C – матрица.

Доказательство. Предположим, что такое преобразование существует всегда:

$$\forall g \exists f \exists C: (\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1} = C.$$

Пусть мы имеем тензор g и соответствующие f и C . Новый метрический тензор C – симметричная положительно определенная матрица, поэтому для C существует разложение Холецкого: $C = LL^T$, где L – невырожденная матрица.

Рассмотрим преобразование $L^T f$. Метрический тензор после преобразования равен:

$$(\nabla \vec{f}^{-1} L^{-1T})^T g \nabla \vec{f}^{-1} L^{-1T} = \\ = L^{-1} (\nabla \vec{f}^{-1})^T g \nabla \vec{f}^{-1} L^{-1T} = \\ = L^{-1} C L^{-1T} = I.$$

Значит, выпуклую область $M \subset \mathbb{R}^2$ с заданным бесконечно дифференцируемым метрическим

тензором g всегда можно преобразовать так, чтобы метрический тензор стал равен единичной матрице, что противоречит предыдущей теореме.

Предположение неверно.

Заключение

В работе доказаны теоремы, характеризующие теоретические ограничения, не позволяющие построить строго равноконтрастную систему цветных координат. Если метрика в пространстве не была внутренней, нельзя гладким преобразованием получить из него пространство с внутренней метрикой. В общем случае нельзя гладко преобразовать цветное пространство с метрическим тензором так, чтобы он стал постоянным, однако его двумерные подпространства можно скаляризовать. Это значит, что цветностное пространство всегда возможно сделать изотропным, но оно должно обладать некоторым локальным свойством, чтобы его было возможно сделать однородным. Хотя Теоремы 3 и 4 относятся к двумерному случаю плоскости цветности, неравноконтрастность (в строгом смысле) плоскости цветности означает также и неравноконтрастность всего трехмерного цветного пространства.

Однако доказанные теоремы не противоречат созданию систем цветных координат, близких к равноконтрастным. Степень такой близости можно оценивать при помощи метрики STRESS, которая позволяет оценить, насколько хорошо расстояния в построенной системе координат соответствуют цветовым расстояниям, полученных в экспериментах на людях [14,15]. Предварительные численные эксперименты авторов показывают, что на практике значения STRESS ограничены снизу не теоретическими пределами неравномерности, следующими из доказанных в работе теорем, а точностью экспериментальных измерений расстояний в цветовом пространстве человека.

Литература

1. *Грассман Г.Г.* XXXVII. К теории сложных цветов. // Лондонский, Эдинбургский и Дублинский философский журнал и научный журнал. 1854. Т. 7(45). С. 254–264.
2. *Лян Дж. и др.* Оценка спектров по необработанным откликам камеры на основе адаптивной локально-взвешенной линейной регрессии // Оптика экспресс. 2019. Т. 27. №. 4. С. 5165–5180.
3. *Смит Т., Гилд Дж.* Колориметрические стандарты МКО и их применение // Труды оптического общества. 1931. Т. 33. №. 3. С. 73.

4. Манселл А.Х. Система и обозначение цвета пигмента // Американский журнал психологии. 1912. Т. 23. №. 2. С. 236-244.
5. Хантер Р. С. Точность, прецизионность и стабильность нового фотоэлектрического измерителя цветового различия // Журнал оптического общества Америки. 1948. Т. 38. №. 12. С. 1094-1094.
6. Барброу Л.Э. Брюссельская сессия Международной комиссии по освещению // Журнал оптического общества Америки. 1960. Т. 50. С. 89.
7. Вышецкий Г. Предложение новой формулы цветоразличия // Журнал оптического общества Америки. 1963. Т. 53. №. 11. С. 1318-1319.
8. Макларен К. XIII. Разработка единого цветового пространства CIE 1976 ($L^* a^* b^*$) и формулы цветового различия // Журнал Общества красильщиков и колористов. 1976. Т. 92. №. 9. С. 338-341.
9. Алман Д.Х. и др. Улучшение оценки цветового различия в промышленности // Центральное бюро Международной комиссии по освещению. Вена. 2001.
10. Луо М.Р., Куи Г., Ригг Б. Разработка формулы цветового различия CIE 2000: CIEDE2000 // Color Research & Application: Одобрено Международным советом по цвету, Цветовой группой (Великобритания), Канадским обществом цвета, Японской ассоциацией науки о цвете, Голландским обществом по изучению цвета, Фондом шведского центра цвета, Австралийским обществом цвета, Центром французского цвета. 2001. Т. 26. №. 5. С. 340-350.
11. Ли Ч. и др. Комплексные цветовые решения: CAM16, CAT16 и CAM16-UCS // Color Research & Application. 2017. Т. 42. №. 6. С. 703-718.
12. МакАдам Д.Л. Зрительная чувствительность к цветовым различиям при дневном свете // Josa. 1942. Т. 32. №. 5. С. 247-274.
13. Коноваленко И.А. и др. ProLab: перцептивно однородная проективная система цветовых координат // IEEE Access. 2021. Т. 9. С. 133023-133042.
14. Крускал Дж.Б. Многомерное шкалирование путем оптимизации критерия соответствия неметрической гипотезе // Психометрика. 1964. Т. 29. №. 1. С. 1-27.
15. Грачева М.А., Белокопытов А.В., Тимофеев В.А., Басова О.А., Максимов П.В. и Николаев Д.П. Оценка порогов цветового различия методом строгой замены // IEEE SPCN 2022, под ред. Юрия Шелепина, VVM Publishing llc 2023. С. 162-175.

Богданов Яков Владимирович. Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва, Россия. Стажер-исследователь. Область научных интересов: математическая физика, цветовое зрение, системы технического зрения, математический анализ. E-mail: jacobogdanov@gmail.com (Ответственный за переписку).

Гладилин Сергей Александрович. Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник. Кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: зрительный интеллект, цветовое зрение, алгоритмы обработки изображений, системы технического зрения. E-mail: gladilin@iitp.ru

Коноваленко Иван Андреевич. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник. Кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: математическое моделирование, анализ данных, компьютерное зрение. E-mail: konovalenko@iitp.ru.

Color coordinate systems: theoretical limits of uniformity

Ya.V. Bogdanov^{I,II}, S.A. Gladilin^I, I.A. Konovalenko^{I,III}^I A.A. Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow, Russia^{II} Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia^{III} Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Abstract. Among the color coordinate systems, a special place is occupied by uniform systems, the Euclidean distance in which estimates the perceptual perception of color distances by humans. The standard linear color coordinate system CIE XYZ was not intended to be uniform, so color coordinate systems close to uniform were proposed: Hunter Lab, CIE 1964 (U^* , V^* , W^*), CIELAB, CAM16-UCS, proLab. Uniform color coordinate systems are widely used, but in the literature little attention is paid to the analysis of theoretical limits of uniform color coordinate systems in the general case. This analysis is devoted to this work. The theorems are proved in the work showing that in the general case it is impossible to make the tensor constant by a smooth transformation of the space with a metric tensor and it is always impossible construct a space with intrinsic metric from a space with non-intrinsic metric, but its two-dimensional subspace can always be made isotropic. It follows that in the general case the construction of a strictly uniform color space is impossible. At the same time, the proven theorems do not contradict the construction of approximately uniform color spaces used in practice.

Keywords: *perceptual uniformity, color space, color distance, space transformations, metric tensor.*

DOI: 10.14357/20790279240405 **EDN:** SYEOKX

References

1. Grassmann H.G. XXXVII. On the theory of compound colours. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1854;7(45):254–264. doi:10.1080/14786445408647464.
2. Liang J., Xiao K., Pointer M.R., Wan X., Li C. Spectra estimation from raw camera responses based on adaptive local-weighted linear regression. Optics express. 2019;27(4):5165–5180. doi:10.1364/OE.27.005165.
3. Smith T., Guild J. The CIE colorimetric standards and their use. Transactions of the optical society. 1931;33(3):73. doi:10.1088/1475-4878/33/3/301
4. Munsell A.H. A pigment color system and notation. The American Journal of Psychology. 1912;23(2):236–244. doi:10.2307/1412843.
5. Hunter R.S. Accuracy, precision, and stability of new photoelectric color-difference meter. JOSA. 1948;38(12):1094–1094. doi:10.1364/JOSA.48.000985.
6. Barbrow L.E. Brussels Session of the International Commission on Illumination. JOSA. 1960;50(1):89. doi:10.1364/JOSA.50.000089.
7. Wyszecki G. Proposal for a new color-difference formula. JOSA. 1963;53(11):1318–1319. doi:10.1364/JOSA.53.001318.
8. McLaren K. XIII. The development of the CIE 1976 (L^* a^* b^*) uniform colour space and colour-difference formula. Journal of the Society of Dyers and Colourists. 1976;92(9):338–341. doi:10.1111/j.1478-4408.1976.tb03301.x.
9. Alman D.H. et al. Improvement to industrial colour-difference evaluation. Central Bureau of the International Commission on Illumination, Vienna. 2001. ISBN:978-3-901906-08-4.
10. Luo M.R., Cui G., Rigg B. The development of the CIE 2000 colour-difference formula: CIEDE2000. Color Research & Application: Endorsed by Inter-Society Color Council, The Colour Group (Great Britain), Canadian Society for Color, Color Science Association of Japan, Dutch Society for the Study of Color, The Swedish Colour Centre Foundation, Colour Society of Australia, Centre Français de la Couleur. 2001;26(5):340–350. doi:10.1002/col.1049.
11. Li C. et al. Comprehensive color solutions: CAM16, CAT16, and CAM16-UCS. Color Research & Application. 2017;42(6):703–718. doi:10.1002/col.22131.
12. MacAdam D.L. Visual sensitivities to color differences in daylight. Josa. 1942;32(5):247–274. doi:10.1364/JOSA.32.000247.
13. Konovalenko I.A., Smagina A.A., Nikolaev D.P., Nikolaev P.P. ProLab: a perceptually uniform projective color coordinate system. IEEE Access. 2021;9:133023–133042. doi:10.1109/ACCESS.2021.3115425.
14. Kruskal J.B. Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric

- hypothesis. *Psychometrika*. 1964;29(1):1-27. doi:10.1007/BF02289565.
15. *Gracheva M.A., Belokopytov A.V., Timofeev V.A., Basova O.A., Maximov P.V. and Nikolaev D.P.* Assessment of color discrimination thresholds by the strict substitution method. IEEE SPCN 2022. Yuri Shelepin (ed.) VVM Publishing llc. 2023. 162-175. ISBN:978-5-9651-1483-2 Available from: https://etu.ru/assets/files/university/irvc/konferencii/2023/2069_2.pdf.

Bogdanov Y.V. Student, Moscow Institute of Physics and Technology. Research Assistant, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), 19 h. 1 Bolshoy Karetny str., Moscow, 127994, Russia. E-mail: jacobogdanov@gmail.com (Responsible for correspondence).

Gladilin S.A. PhD of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), 19 h. 1 Bolshoy Karetny str., Moscow, 127994, Russia. E-mail: gladilin@iitp.ru

Konovalenko I.A. PhD of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia. E-mail: konovalenko@iitp.ru