

Математические модели социально-экономических процессов

Стоимостная оценка машин со случайно сокращающимся сроком службы

С.А. Смоляк

Центральный экономико-математический институт Российской академии
наук, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются подвергающиеся пуассоновскому потоку отказов машины, операционные характеристики которых ухудшаются в процессе эксплуатации. Известна рыночная стоимость новой (вступающей в эксплуатацию) машины и назначенный ей срок службы (ресурс). При отказе машины остаточный срок ее службы скачкообразно сокращается на случайную величину, распределенную по степенному закону. Построена новая модель, связывающая динамику рыночной стоимости машины с остаточным сроком ее службы. Для практической оценки этого недостаточно, поскольку часто о машинах оценщикам известен только их возраст. Однако машины одного возраста могут находиться в разном состоянии, и здесь оценщикам приходится опираться на зависимость средней стоимости машин от возраста. Предложены формулы для построения аналогичных зависимостей, по которым проведены экспериментальные расчеты. Показано, что подобные зависимости мало меняются при изменении ставки дисконтирования и назначенного срока службы, хотя при разных коэффициентах вариации срока службы они различаются.

Ключевые слова: машины, деградация, отказ, срок службы, рыночная стоимость, групповая инфляция.

DOI: 10.14357/20790279250201 **EDN:** FTKACT

Введение

Предметом нашего рассмотрения будут машины одной марки (модели), предназначенные для выполнения определенной работы, обращающиеся на рынке, используемые по назначению и подвергающиеся деградации. В процессе работы техническое состояние машин меняется, и мы хотим выяснить, как при этом меняется остаточный срок их службы и рыночная стоимость. Чтобы решить эту задачу, необходимо каким-то способом описать возможные состояния

машины и изменения состояния машины и ее характеристик в процессе ее использования. Кроме того, вначале мы будем предполагать отсутствие инфляции.

Понятие рыночной стоимости (РС) объекта определяется и комментируется в стандартах оценки [1] и различных учебниках, например, в [2]. Существенно, что РС объекта всегда относится к определенной *дате оценки* и отражает его цену в совершаемой на эту дату (гипотетической) коммерческой сделке между независимыми, хорошо осве-

домленными и действующими расчетливо участниками рынка. На этом основании РС новых машин определяют по данным о ценах первичного рынка таких машин [2]. Однако все подержанные машины разные, и оценивать их РС приходится иначе.

Как отмечается в стандартах оценки, РС машины на определенную дату оценки отражает те выгоды, которые она принесет своему владельцу при последующем использовании. При этом под выгодами, приносимыми машиной в некотором периоде, мы понимаем стоимость выполненных ею работ за вычетом операционных затрат на выполнение этих работ¹. Важной характеристикой состояния машины является интенсивность приносимых ею выгод (ИВ, сумма выгод, приносимых в малую единицу времени). Существенно, что при отсутствии инфляции РС и ИВ машины зависят только от состояния машины, но не от той даты, на которую они оцениваются.

Назовем отношение ИВ машины к ИВ новой машины той же марки относительной интенсивностью приносимых машиной выгод (ОИВ). Отношение РС машины к РС новой машины той же марки (нового аналога) называется коэффициентом годности или относительной стоимости (КГ). Обычно РС подержанных машин оценивают, опираясь на ее возраст, умножая РС ее нового аналога на коэффициент годности (используя при этом различные таблицы или формулы, связывающие его с возрастом машины).

Срок службы машины в теории надежности определяется как момент, когда использование ее по назначению становится технически невозможным или экономически неэффективным. Соответствующие состояния машины именуются *предельными*. Машина в таком состоянии машина выбывает из эксплуатации и сразу же утилизируется как набор отдельных элементов (металлолома, не полностью изношенных деталей и узлов). РС такой машины называется *утилизационной стоимостью* машины и определяется как РС ее элементов за вычетом расходов на демонтаж и продажу. Обычно ее отношение к стоимости новой машины (относительная утилизационная стоимость, ОУС) невелико и нередко при оценке машин не учитывается. На этом основании мы будем считать, что в конце срока службы машина имеет нулевую РС, как это и принимается в системах национальных счетов.

Важными характеристиками машины, изучаемыми в теории надежности и используемыми при стоимостной оценке, являются среднее значение (T) и коэффициент вариации (v) срока ее службы. Информация о значениях этих характеристик у ма-

шин разных видов имеется в системах национальных счетов разных стран, в [3; 4; 5; 6; 7; 8], а также в ряде публикаций по надежности конкретных машин (где оценивается вероятностное распределение их отказов). В частности, для многих видов машин $v=0,25-0,5$.

Для оценки подержанных машин оказывается удобным опираться на *принцип ожидания выгод*, лежащий в основе так называемого доходного подхода к стоимостной оценке. Мы исходим из следующей формулировки этого принципа [9]:

РС машины не меньше ожидаемой суммы дисконтированных к дате оценки выгод от ее использования в последующем расчетном периоде (включая РС машины в конце этого периода), и совпадает с этой суммой при наиболее эффективном использовании машины.

Тем самым, РС машины существенно зависит от того, как в процессе эксплуатации меняется интенсивность приносимых ею выгод, а оценка РС машины предполагает оптимизацию процесса её использования.

Все известные методы оценки машин предполагают описание состояния машины какими-то ее характеристиками. Обычно оценщики характеризуют состояние машины ее возрастом или эффективным возрастом, в теории надежности используют также предложенный Кидзимой [9] показатель виртуального возраста. В [8] коэффициент годности машины связывался с ее *относительным возрастом* – отношением возраста к среднему сроку службы. В [11; 12] состояние машины характеризовалось интенсивностью приносимых машиной выгод, но полученные результаты подтверждают, что зависимости КГ машины от ее относительного возраста для машин почти не меняются при изменении среднего срока их службы.

В данной статье мы характеризуем текущее состояние машины иначе – ее *остаточным сроком службы* (ОСС) s , уменьшающимся в процессе эксплуатации. Это означает, что машины данной марки вступают в эксплуатацию с некоторым назначенным (и одновременно – максимальным) сроком службы L лет. Этот срок мы принимаем за единицу измерения времени. В таких единицах измерения ОСС s становится безразмерной величиной (отношением остаточного срока службы к максимальному), причем для новой машины ОСС=1.

В теории надежности *деградацию* машины описывают как случайное ухудшение характеристик ее надежности. Мы будем описывать ее следующим случайным процессом ухудшения состояния машины и, соответственно, уменьшения интенсивности приносимых ею выгод. Машина начинает работать в

¹ Так определенные «выгоды» во многих источниках именуются иначе, например, «чистым доходом» или «денежным потоком».

новом состоянии $s=L$ и работает, пока не произойдет скрытый отказ. При этом ОСС соответственно уменьшается. Отказы образуют простой пуассоновский поток с интенсивностью λ , так что в любом малом отрезке времени ds вероятность отказа составляет λds . После произошедшего отказа ОСС машины умножается на случайный понижающий коэффициент, распределенный на отрезке $[0, 1]$ с плотностью $\alpha x^{\alpha-1}$, где $\alpha > 1$ – параметр распределения. Легко проверить, что средний коэффициент уменьшения остаточного срока службы после отказа составляет $\alpha/(\alpha+1)$. Поэтому с ростом α влияние отказов на деградацию машины снижается, что позволяет именовать величину α параметром *ослабления деградации*.

Состояние машины определяет и относительную интенсивность приносимых ею выгод (ОИВ). Поэтому зависимость ОИВ от состояния машины – $b(s)$ – мы будем считать известной. Аналогичную зависимость ОИВ от относительного возраста (τ) в системах национальных счетов именуют «зависимостью возраст-эффективность» [13], и принимают при этом, что $b(0)=0$. В ряде стран используют линейную зависимость $b=1-\tau$ или гиперболическую зависимость $b=(1-\tau)/(1-\beta\tau)$.

Интенсивность выгод, приносимых новой машиной, обозначим ее B_0 , пока неизвестна. Позднее мы выразим ее через известную РС новой машины. При этом ИВ машины, находящейся в состоянии s , будет равна $B_0 b(s)$.

Далее мы выясним, как РС машины зависит от ее состояния.

1. Зависимость рыночной стоимости машины от ее состояния

Поскольку в нашей модели предполагается отсутствие инфляции, РС машины не зависит от даты оценки, и мы будем считать ее некоторой (неизвестной) функцией от состояния машины $V(s)$. Технические и экономические соображения показывают, что эта функция должна быть непрерывной и возрастающей, а в конце срока службы (при $s=0$) – обращаться в нуль: $V(0)=0$. Далее мы будем выяснять, как меняется РС машины в процессе ее использования. Рассмотрим машину, находящуюся в состоянии $s > 0$ на дату оценки. Если использовать ее по назначению в малом периоде времени ds , могут возникнуть две ситуации.

1. С вероятностью λds произойдет отказ. Тогда машина окажется в состоянии sx , где x – случайная величина, распределенная на отрезке $[0, 1]$ с указанной выше плотностью. Поскольку инфляция отсутствует, то РС машины в этом состоянии будет случайной величиной $V(sx)$.

2. С вероятностью $1-\lambda ds$ отказа не произойдет. Тогда машина принесет выгоды $B_0 b(s)ds$, затем ее ОСС уменьшится на ds и она перейдет в состояние $s-ds$, в котором будет иметь РС $V(s-ds)$.

Согласно теории стоимостной оценки [1, 9], РС машины на начало периода можно оценить как математическое ожидание суммы дисконтированных (по ставке ρ) приносимых ею за период выгод и РС машины в конце периода:

$$V(s) = \lambda ds \cdot \mathbf{M}[V(sx)] + (1-\lambda ds)\{B_0 b(s)dt + (1-\rho ds)V(s-ds)\} = V(s) + dt[B_0 b(s) - (\rho + \lambda)V(s) - V'(s) + \lambda G(s)],$$

где

$$G(s) = \mathbf{M}[V(sx)] = \int_0^1 V(sx)x^{\alpha-1}dx = \alpha s^{-\alpha} \int_0^s V(y)y^{\alpha-1}dy. \quad (1)$$

Отсюда следует, что при $s > 0$

$$V'(s) + (\rho + \lambda)V(s) - \lambda G(s) = B_0 b(s). \quad (2)$$

При этом ставка дисконтирования ρ в модели – доналоговая, номинальная и безрисковая. Поскольку за единицу времени мы приняли максимальный срок службы машин L , то эта ставка, назовем ее *нормированной*, – безразмерная и получается из «обычной» доналоговой номинальной безрисковой ставки умножением на L .

Докажем теперь, что $b(0)=0$. Для этого вначале заметим, что:

- $V(0)=0$, поскольку в конце срока службы машина имеет нулевую РС;
- $V'(0) \geq 0$, поскольку в процессе работы ОСС уменьшается, а РС не увеличивается;
- $G(s) \leq V(s)$, поскольку РС машины снижается с уменьшением ОСС.

Но тогда из (2) вытекает, что

$$0 = V'(s) + \rho V(s) + \lambda[V(s) - G(s)] - B_0 b(s) \geq \rho V(s) - B_0 b(s).$$

При $s \rightarrow 0$ отсюда следует, что $b(0) \geq 0$.

Остается доказать противоположное неравенство. Для этого допустим, что машину в состоянии 0, имеющую нулевую РС, используют по назначению малое время ds . Если отказа не произойдет, машина принесет выгоды $B_0 b(0)ds$ и останется в прежнем состоянии, а в случае отказа машина также останется в прежнем состоянии. Поскольку так использовать машину неэффективно, то в силу принципа ожидания выгод должно выполняться неравенство:

$$0 = V(0) \geq \lambda ds V(0) + (1-\lambda ds)\{B_0 b(0)ds + (1-\rho ds)V(0)\} = B_0 b(0)ds.$$

Отсюда вытекает, что $b(0) \leq 0$, что и требовалось доказать. Таким образом, в предельном состоянии (в конце срока службы) машина должна приносить выгоды с нулевой интенсивностью. Это позволяет использовать для оценки машин те же зависимости «возраст-эффективность», что и в системах национальных счетов.

Зависимость $V(s)$ РС машины от ее состояния является решением уравнения (2) с начальным условием $V(0)=0$. Легко видеть, что она имеет вид: $V(s)=B_0 W(s)$, где $W(s)$ – решение того же уравнения (2) при $B_0=1$, т.е.

$$W'(s) + (\rho + \lambda)W(s) - \lambda \alpha s^{-\alpha} \int_0^s W(y) y^{\alpha-1} dy = b(s). \quad (3)$$

Поскольку новая машина имеет известную стоимость K и находится в состоянии 1, то имеет место равенство: $K=V(1)=B_0 W(1)$. Отсюда находится неизвестная ИВ новой машины: $B_0=K/W(1)$. Однако эта формула нам не понадобится, поскольку для оценки подержанных машин достаточно определять их коэффициенты годности, $k(s)=V(s)/K=W(s)/W(1)$, которые не зависят от B_0 .

Решать уравнение (3) приходится численными методами, представив его в виде системы соотношений:

$$\begin{aligned} H(s) &= \alpha s^{-\alpha} \int_0^s W(y) y^{\alpha-1} dy. \\ W(s) &= \int_0^s [b(x) + \lambda H(x)] e^{(\rho+\lambda)(x-s)} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта система решалась методом итераций (в качестве первого приближения принималось $H(s)=0$). Значения значений функций W и H в узлах равномерной сетки точек находились с помощью квадратурных формул.

Далее мы будем искать среднее значение и коэффициент вариации срока службы машин.

2. Срок службы машины

Обозначим через $\tau(s)$ – случайный ОСС машины в состоянии s , а через $T(s)$ – его среднее значение: $T(s) = \mathbf{M}[\tau(s)]$. Заметим, что при $s>0$ в малом периоде времени ds после даты оценки возможны две ситуации.

Если машина не откажет, то в конце периода окажется в состоянии $s-ds$, и ее ОСС в начале периода составит $\tau(s-ds)+ds$. Тогда среднее значение этого срока будет равно $T(s-ds)+ds$. Если же машина откажет, то перейдет в состояние sx , где x распределен с плотностью $\alpha x^{\alpha-1}$ на отрезке $[0,1]$. При этом средний ОСС машины после отказа

составит $\int_0^1 T(sx) \alpha x^{\alpha-1} dx$.

Учитывая вероятности обеих ситуаций, имеем:

$$\begin{aligned} T(s) &= \mathbf{M}[\tau(s)] = (1 - \lambda ds) \mathbf{M}[ds + \tau(s - ds)] + \lambda ds \cdot \int_0^1 T(sx) \alpha x^{\alpha-1} dx = \\ &= (1 - \lambda ds) [T(s - ds) + ds] + \lambda ds \cdot \alpha s^{-\alpha} \int_0^s T(y) y^{\alpha-1} dy = \\ &= (1 - \lambda ds) [T(s) - T'(s) dt + ds] + \lambda ds \cdot \alpha s^{-\alpha} \int_0^s T(y) y^{\alpha-1} dy. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает уравнение для функции $T(s)$:

$$T'(s) + \lambda T(s) - \lambda \alpha s^{-\alpha} \int_0^s T(y) y^{\alpha-1} dy = 1. \quad (5)$$

Поскольку $\tau(0)=0$, то краевым условием здесь будет $T(0)=0$.

Средний (полный) срок службы машин равен среднему ОСС новой (находящейся в состоянии $s=1$) машины $T(1)$.

Уравнение для среднего квадрата ОСС $R(s) = \mathbf{M}[\tau^2(s)]$ выводится тем же способом. При $s>0$ в малом отрезке времени ds после даты оценки возможны две ситуации. Если машина не откажет, то перейдет в состояние $s-ds$, и ее ОСС на дату оценки станет равным $\tau(s-ds)+ds$. Если же машина откажет, то ее ОСС станет равным $\tau(sx)$, а средний

квадрат ОСС составит $\int_0^1 R(sx) x^{\alpha-1} dx$. Учитывая вероятности обеих ситуаций, имеем:

$$\begin{aligned} R(s) &= \mathbf{M}[\tau^2(s)] = (1 - \lambda ds) \mathbf{M}[(ds + \tau(s - ds))^2] + \lambda ds \cdot \int_0^1 R(sx) x^{\alpha-1} dx = \\ &= (1 - \lambda ds) [R(s - ds) + 2T(s) ds] + \lambda ds \cdot \alpha s^{-\alpha} \int_0^s R(y) y^{\alpha-1} dy = \\ &= (1 - \lambda ds) [R(s) - R'(s) dt + 2T(s) ds] + \lambda ds \cdot \alpha s^{-\alpha} \int_0^s R(y) y^{\alpha-1} dy. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение, отличающееся от (5) только правой частью:

$$R'(s) + \lambda R(s) - \lambda \alpha s^{-\alpha} \int_0^s R(y) y^{\alpha-1} dy = 2T(s). \quad (6)$$

Поскольку $\tau(0)=0$, то начальным условием для этого уравнения будет $R(0)=0$.

Если решить уравнения (5) и (6), то необходимые нам среднее значение T и коэффициент вариации v (полного) срока службы машины теперь можно найти, применив полученный результат к новой машине, у которой $s=1$. Имеем:

$$T = T(1); \quad v = \sqrt{R(1)/T^2(1) - 1}. \quad (7)$$

Уравнения (5) и (6) являются частными случаями (при $a(s)=1$ и $a(s)=2T(s)$ соответственно) следующего уравнения:

$$f'(s) + \lambda f(s) - \lambda \alpha s^{-\alpha} \int_0^s f(y) y^{\alpha-1} dy = a(s); \quad f(0) = 0. \quad (8)$$

Его можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} e^{\lambda s} s^\alpha a(s) &= e^{\lambda s} s^\alpha f'(s) + \lambda e^{\lambda s} \left[s^\alpha f(s) - \int_0^s f(y) \alpha y^{\alpha-1} dy \right] = \\ &= e^{\lambda s} s^\alpha f'(s) + \lambda e^{\lambda s} \left[s^\alpha f(s) - \int_0^s f(y) dy^\alpha \right] = \\ &= e^{\lambda s} s^\alpha f'(s) + \lambda e^{\lambda s} \int_0^s y^\alpha f'(y) dy = \frac{d}{ds} \left[e^{\lambda s} \int_0^s y^\alpha f'(y) dy \right]. \end{aligned}$$

Отсюда последовательно вытекают следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_0^s y^\alpha f'(y) dy &= \int_0^s e^{\lambda(x-s)} x^\alpha a(x) dx; \\ s^\alpha f'(s) &= s^\alpha a(s) - \lambda \int_0^s e^{\lambda(x-s)} x^\alpha a(x) dx; \\ f'(s) &= a(s) - \lambda s^{-\alpha} \int_0^s e^{\lambda(x-s)} x^\alpha a(x) dx. \end{aligned}$$

Последняя формула позволяет выразить решение уравнения (8) через интегралы. Однако для вычислений оказалось удобнее представить ее в виде системы уравнений:

$$g(s) = \lambda s^{-\alpha} \int_0^s e^{\lambda(x-s)} x^\alpha a(x) dx; \quad f(s) = \int_0^s [a(x) - g(x)] dx.$$

Если задать значения функции a на равномерной сетке точек – величины $a_j = a(jh)$, то соответствующие значения $f_j = f(jh)$ и $g_j = g(jh)$ можно найти по приближенным квадратурным формулам.

Далее, при проведении численных расчетов, мы будем учитывать следующие важные обстоятельства.

Величину L мы определили ранее как остаточный срок службы новой машины и приняли за единицу времени. Но в процессе работы ОСС все время уменьшается. Поэтому случайный полный срок службы машины никогда не превосходит L , так что L является *максимальным* полным сроком службы машин данной марки. Обычно такой срок не превышает 40 лет.

Отношение среднего полного срока службы машин к максимальному сроку их службы в нашей модели выражается безразмерной величиной $T=T(1)$. В системах национальных счетов разных стран максимальные сроки службы машин обычно в 1,5-2 раза превышают средние, поэтому здесь $T(1)=0,50-0,67$. На практике встречаются машины, срок службы которых втрое превышает средний, а для некоторых машин недопустимыми считаются сроки службы, превышающие назначенный срок более, чем на четверть. Поэтому мы считаем правдоподобным, что $T(1)=0,3-0,8$. О коэффициентах

вариации сроков службы (v) имеется недостаточно полная информация. В системах национальных счетов они обычно составляют 0,25-0,35, аналогичные результаты вытекают из работ [5] и др., однако результаты ускоренных испытаний некоторых машин на долговечность и анализ возрастов выбывающих машин отдельных видов показывают, что они могут достигать и 0,7 [3; 4; 7]. Поэтому мы считаем правдоподобными значения $v=0,25-0,65$.

Приводимые далее примеры расчетов будут относиться к таким сочетаниям параметров α и λ , которым отвечают правдоподобные значения $T(1)$ и v . Отметим, что малым значениям λ отвечают машины, которые безотказно работают почти весь назначенный срок службы. Очевидно, что у таких машин средний срок службы близок к максимальному, а коэффициент вариации срока службы – небольшой.

3. Зависимость рыночной стоимости от возраста

Для оценки подержанных машин оценщики часто используют зависимости коэффициента годности (КГ) от возраста. Но в нашей модели машины одного возраста могут находиться в разных состояниях, и, значит, иметь разную стоимость. Поэтому мы будем искать зависимость $K(t)$ *средней* РС машин от их возраста (t). Прямо получить какие-то формулы для нее не удастся, и приходится решать более общую задачу: искать зависимость $K(z, t)$ средней РС машин, которые дожили до даты оценки и за время t до этой даты находились в состоянии $t+z$. Обратим внимание, что функция $K(z, t)$ определена только в треугольнике $0 \leq z \leq 1, 0 \leq t \leq 1-z$.

Поскольку машина в возрасте t на дату оценки, за время t до этого была новой (находилась в состоянии 1), то ее средняя стоимость в наших обозначениях должна равняться $K(1-t, t)$, так что нужная нам зависимость определяется формулой: $K(t)=K(1-t, t)$.

Обозначим теперь через $\Gamma_{z,t}$ группу машин, которые за время t до даты оценки находились в состоянии $t+z$ и дожили до даты оценки. При $x=0$ у всех машин этой группы на дату оценки ОСС будет равен нулю, так что $K(0, t)=0$. Учтем также, что машины в состоянии z на дату оценки относятся к группе $\Gamma_{z,0}$ и имеют РС= $W(z)$. Поэтому $K(z, 0)=W(z)$. В частности, у новой машины $K(1, 0)=W(1)$. В таком случае средний коэффициент годности машин возраста t определится формулой:

$$\text{СКГ}(t)=K(1-t, t)/W(1). \quad (9)$$

Прежде, чем искать неизвестную функцию $K(z, t)$, отметим следующее обстоятельство.

Рассмотрим машины, отказавшие в состоянии $t+z$. После отказа каждая из них перейдет в случайное состояние y , распределенное на отрезке $[0, t+z]$ с плотностью $\alpha(t+z)^{-\alpha} y^{\alpha-1}$. При этом с вероятностью $\left[t/(t+z)\right]^\alpha$ они могут оказаться в состояниях $y < t$. Однако машины группы $\Gamma_{z,t}$, отказавшие в состоянии $t+z$, доживают до даты оценки, и их остаточный срок службы не меньше t , так что для них подобная ситуация невозможна. Поэтому после отказа они переходят в случайное состояние y , распределенное на отрезке $[t, t+z]$ с плотностью

$$\frac{\alpha(t+z)^{-\alpha} y^{\alpha-1}}{1 - \left[t/(t+z)\right]^\alpha} = \frac{\alpha y^{\alpha-1}}{(t+z)^\alpha - t^\alpha}.$$

Напомним, что $K(z, t)$ отражает среднюю стоимость машин группы $\Gamma_{z,t}$ в момент, когда они доживут до даты оценки. Рассмотрим машину группы $\Gamma_{z,t}$.

Если за малое время dt она не откажет (вероятность этого – $1 - \lambda dt$), то перейдет в состояние $t+z-dt$ за время $t-dt$ до даты оценки, т.е. в группу $\Gamma_{z,t-dt}$. У таких машин, доживших до даты оценки, средняя стоимость составит $K(z, t-dt)$.

Если же в этом периоде произойдет отказ, то, как показано выше, они перейдут в случайное состояние y , распределенное на отрезке $[t, t+z]$ с плотностью $\alpha y^{\alpha-1} / [(t+z)^\alpha - t^\alpha]$, и через время t (т.е. на дату оценки) их средняя РС составит $K(y-t, t)$.

Учитывая вероятности соответствующих событий, имеем:

$$\begin{aligned} K(z, t) &= (1 - \lambda dt) K(z, t-dt) + \lambda dt \int_t^{t+z} K(y-t, t) \frac{\alpha y^{\alpha-1}}{(t+z)^\alpha - t^\alpha} dy = \\ &= K(z, t) - \left\{ K'_t(z, t) + \lambda K(z, t) - \frac{\lambda}{(t+z)^\alpha - t^\alpha} \int_0^z K(x, t) \alpha(x+t)^{\alpha-1} dx \right\} dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$K'_t(z, t) + \lambda K(z, t) = \frac{\lambda}{(t+z)^\alpha - t^\alpha} \int_t^{t+z} K(y, t) \alpha y^{\alpha-1} dy.$$

Учитывая, что $K(z, 0) = W(z)$, для численных расчетов это уравнение можно представить в виде системы соотношений:

$$\begin{aligned} K'_t(z, t) + \lambda K(z, t) &= \lambda J(z, t); \quad K(z, 0) = W(z); \\ J(z, t) &= H(z, t) / [(t+z)^\alpha - t^\alpha]; \quad H(z, t) = \int_0^z K(x, t) \alpha(x+t)^{\alpha-1} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Систему (10) мы решали численными методами, находя значения функций K , J и H в узлах равномерной сетки. Интегралы вычислялись по рекуррентным квадратурным формулам.

4. Смягчение принятых допущений

При построении модели принималось, что утилизационная стоимость машин U – нулевая, а инфляция отсутствует. Следуя [11], покажем, как можно избавиться от этих предположений.

1. Пусть у нашей машины **утилизационная стоимость** $U \neq 0$, а $u = U/K$ – ее относительная утилизационная стоимость. Возьмем условную машину, ведущую себя так же, как и в нашей модели, но имеющую скорректированную интенсивность выгод $B_c(s) = B(s) - rU$. Рассчитаем по модели все характеристики этой машины, добавив в их обозначения нижний индекс c . Нетрудно убедиться, что стоимости нашей и условной машин, находящихся в одном и том же состоянии, отличаются на U , а коэффициенты годности – на u . Отсюда легко выводится связь между коэффициентами годности нашей и условной машины:

$$k(s) = (1-u)k_c(s) + u; \quad \text{СКГ}(t) = (1-u)\text{СКГ}_c(t) + u.$$

Таким образом, построенная модель применима и для оценки машин с ненулевой утилизационной стоимостью.

2. В общем случае учесть влияние **инфляции** затруднительно. Однако посмотрим, как ее учитывают оценщики машин и оборудования. Анализируя динамику цен первичного рынка, они обычно могут установить сложившийся темп роста цен *новых* машин определенной марки (или более широкой группы аналогичных машин) и спрогнозировать его на ближайшую перспективу. Для подержанных машин такой прием не годится, поскольку все подержанные машины – разные. Здесь может помочь то обстоятельство, что, покупая подержанную машину, покупатель обычно смотрит, не окажется ли более выгодной покупка новой машины той же марки. С этим вынуждены считаться и продавцы подержанных машин. На этом основании оценщики принимают, что цены вторичного рынка растут синхронно с ценами первичного. Грубо говоря, если некая подержанная машина М1 стоила в два раза меньше новой, то и, например, через месяц, другая машина М2, которая будет находиться в том же техническом состоянии, что и машина М1, будет стоить в два раза меньше, чем новая. По существу, это отвечает такому характеру инфляции, при котором РС новых машин меняются с определенным темпом i , а зависимости коэффициентов годности от состояния машин не меняются. Такую инфляцию мы называем **групповой** [9; 11]. Темп роста РС новых машин i при этом можно назвать темпом групповой инфляции.

Подтвердить групповой характер инфляции может следующий факт. В США Для оценки машин и оборудования в ряде штатов США исполь-

зуют публикуемые властями таблицы процентов годности, например [14: 15]. Подобные таблицы ежегодно пересматриваются, однако сами значения процентов годности для каждого вида машин изменяются незначительно.

Если принять допущение, что инфляция имеет групповой характер с некоторым (прогнозируемым на ближайшую перспективу) темпом i , то у машин в любом состоянии t рыночная стоимость $V(t)$ будет меняться с тем же темпом. Тогда с тем же темпом будет меняться и производная $V'(t)$. Но в таком случае, как видно из формулы (2), с тем же темпом будет меняться и ИВ новой машины B_0 . Все остальные соотношения модели остаются без изменения, с той лишь разницей, что в формулах (1)-(3) номинальная ставка дисконтирования r заменится на $r-i$. Такая, скорректированная (с учетом групповой инфляции) ставка близка по содержанию и величине к *реальной* безрисковой ставке дисконтирования, но отличается тем, что из номинальной ставки вычитается темп роста цен новых машин конкретной марки, а не темп общей инфляции в стране. Обычно значения скорректированной ставки не превышают 10% годовых, так что даже при максимальном сроке службы машин 40 лет значения $r-i$ будут не больше, чем $0,1 \times 40 = 4$. Мы учитываем это в приводимых далее примерах расчетов.

5. Экспериментальные расчеты

Основные расчеты проводились при нормированной ставке дисконтирования $r=1,8$. Вначале с помощью формул (7) были построены зависимости среднего значения T и коэффициента вариации v срока службы машины от интенсивности отказов λ и параметра ослабления деградации α (рис. 1-2). Как видим, не все сочетания λ и α отвечают правдоподобным значениям T и v .

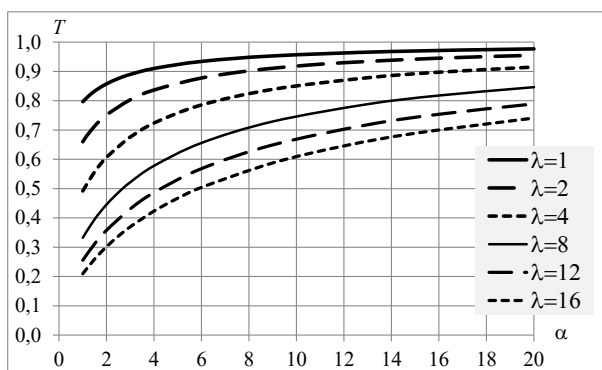


Рис. 1. Зависимости среднего срока службы машин от параметра ослабления деградации при разной интенсивности отказов

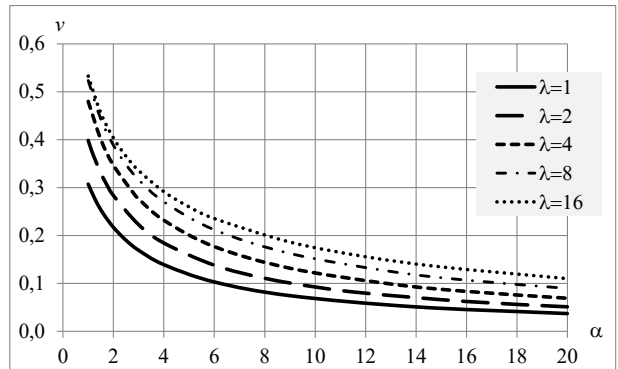


Рис. 2. Зависимости коэффициента вариации срока службы машин от параметра ослабления деградации при разной интенсивности отказов

Как уже отмечалось, для оценки поддержанных машин обычно используют коэффициенты годности (отношения РС машины к РС аналогичной новой машины). Для построения зависимости этих коэффициентов от состояния машины (отношения остаточного срока службы к максимальному) мы решали уравнение (2) и применяли формулу $k(s)=W(s)/W(1)$.

На рис. 3 приведены такие зависимости для коэффициента вариации срока службы $v=0,45$ и ряда соответствующих сочетаний параметров модели λ и α .

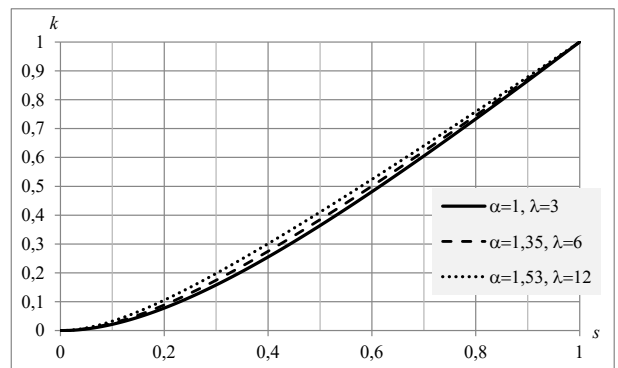


Рис. 3. Зависимости коэффициента годности машины от ее состояния при $v=0,45$ и ряда соответствующих сочетаний λ и α

Полученные зависимости достаточно близки, хотя соответствующие средние сроки службы сильно отличаются. Аналогичная ситуация наблюдается и при других значениях v .

Обычно оценщики поддержанных машин связывают коэффициенты годности с возрастом. Решение системы (10) и формула (9) позволяют построить аналогичную зависимость *средних* коэффициентов годности от возраста. Пример показан на рис. 4. В нем принята линейная зависимость интенсивности выгод от OCC ($b(s)=s$) и $v=0,45$.

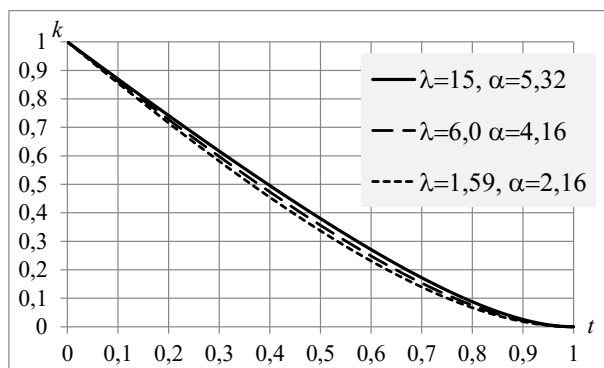


Рис. 4. Зависимости среднего коэффициента годности машины от возраста при $v=0,35$ и разных сочетаниях λ и α

И в этом случае полученные зависимости оказались близкими, несмотря на большие различия средних сроков службы. Подобная ситуация имеет место и при других значениях коэффициента вариации срока службы.

Напомним, что в нашей модели за единицу времени принят максимальный срок службы, поэтому «модельный» возраст t на рис. 4 отражает отношение хронологического возраста к *максимальному*. Между тем, как уже говорилось, для оценки подержанных машин часто используются зависимости средних коэффициентов годности от относительного возраста τ (отношения хронологического возраста к *среднему*), которые мало зависят от среднего срока службы (T), но сильно меняются при изменении коэффициента вариации срока службы v . Однако проведенные расчеты не подтвердили такого явления в нашей модели. В то же время, если зафиксировать v , то при разных соответствующих комбинациях λ и α зависимости СКГ(τ) оказываются очень близкими. Для разных T они приведены на рис. 5.

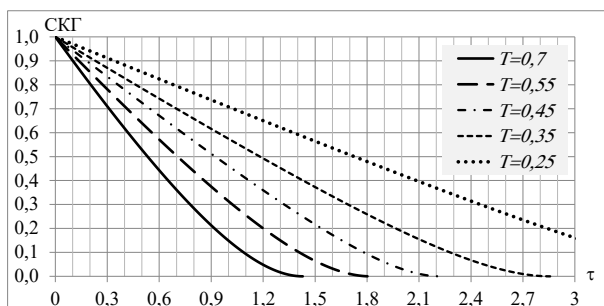


Рис. 5. Зависимости среднего коэффициента годности машины от относительного возраста при разных средних сроках службы (T)

Как уже говорилось, основные расчеты проводились применительно к нормированной ставке дисконтирования (произведения «обычной ставки» на максимальный срок службы) $\rho=1,8$. Вли-

яние изменения этой ставки на средние коэффициенты годности при $\alpha=1$ и некоторых значениях среднего срока службы T показано на рис. 6. Мы видим, что существенное изменение ставки мало влияет на значения СКГ.

Выше говорилось, что в системе национальных счетов используются различные зависимости интенсивности приносимых машиной выгод от возраста. В частности, в России и используется гиперболическая зависимость. Если выразить ее через относительный остаточный срок службы, она примет вид: $b(s)=2s/(1+s)$. При такой зависимости полученные результаты качественно не изменяются, но коэффициенты годности значимо увеличиваются. На рис. 7 сопоставляются результаты расчетов СКГ по линейной и гиперболической зависимостям, проведенных для некоторых значений среднего срока службы.

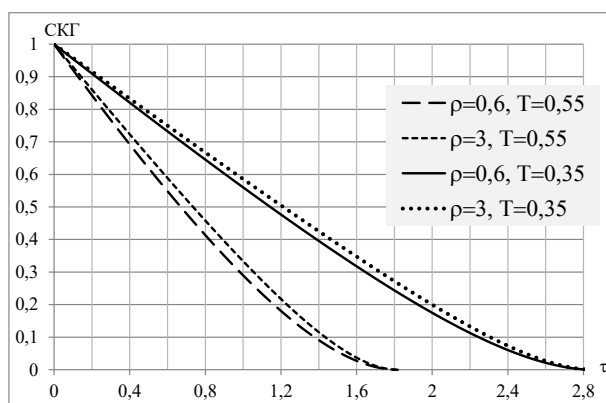


Рис. 6. Зависимости среднего коэффициента годности машины от относительного возраста при $\alpha=1$ и разных сочетаниях среднего срока службы и ставки дисконтирования

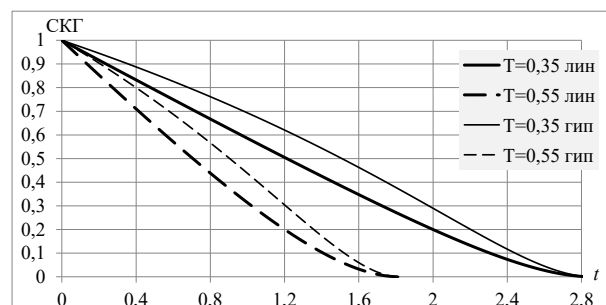


Рис. 7. Зависимости среднего коэффициента годности машины от относительного возраста для разных средних сроков службы (T) при линейной и гиперболической динамике интенсивности выгод

Заключение

Предложена и исследована новая модель случайного процесса деградации машин. В этом про-

цессе состояние машины характеризуется ее остаточным сроком службы (ресурсом), скачкообразно уменьшающимся при случайном отказе. Установлена зависимость среднего значения и коэффициента вариации срока службы машины, а также ее рыночной стоимости от ее состояния. При практической оценке подержанных машин оценщики чаще всего учитывают их возраст. Однако машины одного возраста могут находиться в разных состояниях и иметь разную стоимость, и оценщикам приходится ориентироваться на среднюю стоимость таких машин. В связи с этим построены зависимости средней рыночной стоимости машин от возраста. Представляется, что полученные результаты могут быть использованы не только для стоимостной оценки машин, но и для развития модельного аппарата теории надежности.

Литература

1. International Valuation Standards (IVS): Effective 31 January 2022. International Valuation Standards Council.
2. Федотова М.А. (ред.). Оценка машин и оборудования : учебник (изд. 2-е). М.: ИНФРА-М. 2018.
3. Erumban A.A. (2008). Lifetimes of machinery and equipment: Evidence from Dutch manufacturing. // Review of income and wealth. Series 54, Number 2.
4. Nomura K., Suga Y. Measurement of depreciation rates using microdata from disposal survey of Japan. In: The 35th IARIW General Conference, Copenhagen, Denmark. 2018, July.
5. Schmalwasser O., Schidlowski M. Kapitalstockrechnung in Deutschland // Wirtschaft und Statistik. 2006, No.11. 1107-1123.
6. РД 26-01-143-83. Надежность изделий химического машиностроения. Оценка надежности и эффективности при проектировании.
7. Острейковский В.А. Теория надежности: учебник для вузов. М.: Высшая школа. 2003.
8. Лейфер Л.А. (ред.). Справочник оценщика машин и оборудования. Корректирующие коэффициенты и характеристики рынка машин и оборудования. Изд. 3-е. Нижний Новгород: Приволжский центр методического и информационного обеспечения оценки. 2023.
9. Смоляк С.А. Оптимизация использования и стоимостная оценка машин. М.: ЦЭМИ РАН, 2023. 149 с. DOI: 10.33276/978-5-8211-0810-4
10. Kijima M. Some results for repairable systems with general repair. *Journal of Applied Probability*, 1989. Vol. 26. Pp. 89-102.
11. Смоляк С.А. Пуассоновский процесс деградации машин: применение к стоимостной оценке // Журнал Новой экономической ассоциации. 2020. № 4(48). с. 63-84. DOI: 10.31737/2221-2264-2020-48-4-3
12. Смоляк С.А. Стоимостная оценка машин, подвергающихся винеровскому процессу деградации // Экономика и математические методы. 2021. Т. 57. № 3. С. 97-109. DOI: 10.31857/S042473880016422-3.
13. СНС 2008. Система национальных счетов 2008. Европейская комиссия, Международный валютный фонд, Организация экономического сотрудничества и развития, ООН, Всемирный банк. Нью-Йорк. 2012.
14. 2022 Cost Index and Depreciation Schedules. North Carolina Department of Revenue
15. 2022 Business Personal Property Manual. Arizona Department of Revenue.

Смоляк Сергей Абрамович. Центральный экономико-математический институт Российской академии наук, г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник, доктор экономических наук. Область научных интересов: математическое моделирование экономических процессов. E-mail: smolyak1@yandex.ru.

Valuation of machines with a randomly decreasing service life

S.A. Smolyak

Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

Abstract. We consider machines that are subject to a Poisson failure stream and whose operational characteristics deteriorate during operation. The market value of the new machine and its assigned service life are known. In case of machine failure, its remaining service life is abruptly shortened by a random value distributed according to a power law. A new model has been built that links the dynamics of the market value of the machine with its remaining service life. This is not enough for a practical valuation, since appraisers often only know their age about cars. However, the machines of the same age may be in different condition, and here appraisers have to rely on the dependence of the average cost of machines on age. We have obtained formulas for constructing similar dependencies, according to which experimental calculations have been carried out. It is shown that such dependencies change little when the discount rate and the assigned service life change, although they differ with different coefficients of service life variation.

Keywords: *machinery, degradation, failure, service life, market value, group-specific inflation.*

DOI: 10.14357/20790279250201 **EDN:** FTKACT

References

1. International Valuation Standards (IVS): Effective 31 January 2022. International Valuation Standards Council.
2. *Fedotova M.A.* (ed.). *Otsenka mashin i oborudovaniya* [Machinery and Equipment Valuation : The textbook. 2nd ed. Moscow, INFRA-M. 2018]. (in Russian)
3. *Erumban A.A.* (2008). Lifetimes of machinery and equipment: Evidence from Dutch manufacturing. // Review of income and wealth. Series 54, Number 2.
4. *Nomura K., Suga Y.* Measurement of depreciation rates using microdata from disposal survey of Japan. In: The 35th IARIW General Conference, Copenhagen, Denmark. 2018, July.
5. *Schmalwasser O., Schidlowski M.* Kapitalstockrechnung in Deutschland // Wirtschaft und Statistik. 2006, No.11. 1107-1123.
6. The regulating Document 26-01-143-83. Nadyozhnost' izdeliy khimicheskogo mashinostroyeniya [Reliability of products of chemical mechanical engineering. An assessment of reliability and efficiency at design]. (in Russian)
7. *Ostreykovsky V.A.* Teoriya nadezhnosti [Reliability theory: Textbook for universities. Moscow: Vysshaya shkola. 2003]. (in Russian).
8. *Leyfer L.A.* (ed.). Spravochnik otsenshchika mashin i oborudovaniya [Reference book of the appraiser of machinery and equipment. Corrective factors and characteristics of the market of machinery and equipment. 3rd ed. Nizhny Novgorod: Volga Center for Methodological and Informational Support of Assessment. 2023]. (in Russian).
9. *Smolyak S.A.* Optimizatsiya ispolzovaniya i stoimostnaya otsenka mashin [Optimization of the use of machinery and Equipment and their Valuation. Moscow, CEMI RAS, 2023]. (in Russian) DOI: 10.33276/978-5-8211-0810-4
10. *Kijima M.* Some results for repairable systems with general repair. Journal of Applied Probability, 1989. Vol. 26. Pp. 89-102.
11. *Smolyak S.A.* Puassonovsky process degradatsii mashin: Primeneniye k stoimostnoy otsenke [The Poisson Process of machinery Degradation: Application to Valuation // Journal of the New Economic Association, 2020, Vol. 48 (4), pp. 63-84]. (in Russian). DOI: 10.31737/2221-2264-2020-48-4-3
12. *Smolyak S.A.* Stoimostnaya otsenka mashin, podverga shchikhsya vinerovskomu processu degradatsii [Valuation of Machinery and Equipment subject to the Wiener Degradation Process // Economics and Mathematical Methods, 2021, Vol. 57 (3), pp. 97-109]. (in Russian). DOI: 10.31857/S042473880016422-3.
13. System of National Accounts 2008 – SNA 2008. European Commission, International Monetary Fund, OECD, United Nations, World Bank. New York, 2009.
14. 2022 Cost Index and Depreciation Schedules. North Carolina Department of Revenue
15. 2022 Business Personal Property Manual. Arizona Department of Revenue.

Sergey A. Smolyak. Doctor of Economic Sciences. Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences, 47, Nakhomovsky Prospect, Moscow, Russia. Research interests: mathematical modeling of economic processes. E-mail: smolyak1@yandex.ru