

Динамические системы

Синтез оптимальных управлений в задаче дифференциальной игры. Алгебраический метод

В.Н. АФАНАСЬЕВ, И.А. ГАРАЖА

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается задача дифференциальной игры стабилизации с нулевой суммой и квадратичным функционалом качества. Объект управления, подвергающийся воздействию неконтролируемых возмущений, описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Известно, что синтез оптимальных управлений с обратной связью приводит к необходимости решать в темпе функционирования системы скалярное дифференциальное уравнение в частных производных Беллмана-Айзекса. Для решения этого уравнения в работе предложен алгебраический метод. Приведены результаты моделирования дифференциальной игры с нулевой суммой в задаче управления техническим объектом.

Ключевые слова: дифференциальные игры, оптимальное управление, уравнение Беллмана-Айзекса, псевдообратные матрицы.

DOI: 10.14357/20790279250308 **EDN:** JCPGCT

Введение

Естественным развитием математической теории оптимальных процессов, основанной на применении дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, явилась теория дифференциальных игр. Становление этой теории связано с именами Р. Айзекса [1, 2], Дж. Брэкуэлла [3], Брайсона и Хо Ю-Ши [4], Л.С. Понтрягина [5, 6], Е.Ф. Мищенко [7], Б.Н. Пшеничного и многих других зарубежных и советских ученых. С конца 1970-х годов появилась своего рода самостоятельная часть прикладной теории дифференциальных игр, в которой рассматриваются задачи преследования, убегания, защиты цели [8–17]. В работах Л.С. Понтрягина [5, 6] и Е.Ф. Мищенко [7] получены достаточные условия завершения преследования в линейных дифференциальных играх. В исследованиях Н.Н. Красовского, А.И. Субботина [8], их учеников и сотрудников изучаются позиционные дифференциальные игры, для которых сформули-

рованы задачи сближения и уклонения, предложены реализуемые на современных математических пакетах процедуры управления. Проблемы теории дифференциальных игр имеют своим источником актуальные прикладные задачи: управление экономикой и оценке финансовых рисков [18–21]; разработке политических и военных стратегий [22–24]; в биологии и медицине [25–29]; управление объектами физического профиля [16, 30]. Значительное число различных управляемых объектов относится к классу неопределенных объектов, т.е. объектов с неполной информацией о параметрах, состоянии, взаимодействии со средой [30–32]. Для решения проблемы построения управления такими объектами также может применяться метод дифференциальных игр [16, 31–35].

Начиная с работ А.Е. Брайсона [4] дифференциальные игры с нулевой суммой стали рассматриваться как задачи теории оптимального управления. Синтез оптимальных управлений в таких

играх приводит к необходимости поиска решений скалярного дифференциального уравнения в частных производных Беллмана-Айзека [35,36]. Аналитическое решение такого уравнения в общем случае является проблемным.

В настоящей статье рассматривается дифференциальная игра с нулевой суммой и квадратичным функционалом качества применительно к задаче управления нелинейным объектом, находящегося под воздействием ограниченных возмущений. Решение соответствующего уравнения Беллмана-Айзека ищется с применением алгебраического метода, изложенного в [38, 39] и обобщенного в настоящей статье на случай дифференциальных игр.

Основное содержание статьи расположено в трех разделах. Вначале формулируется задача дифференциальной игры для нелинейного объекта, находящегося под воздействием ограниченных возмущений, с квадратичным функционалом качества. Производится синтез управлений, доказываются их оптимальность. Определяются условия существования решения дифференциальной игры с нулевой суммой. Далее доказывается Лемма 2.1 о необходимых и достаточных условиях существования алгебраического решения скалярного функционального нелинейного уравнения. Приводятся результаты применения этой Леммы для нахождения решения уравнения Беллмана-Айзека в задаче стабилизации объекта, находящегося под воздействием ограниченных возмущений. Доказывается оптимальность полученного решения. Приводится пример использования полученных теоретических результатов при решении задачи управления синхронным генератором в условиях действия возмущений.

1. Задача дифференциальной игры при действии возмущающих сил

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальную игру двух игроков G_u и G_w , описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))w(t) + g_2(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где $x(\cdot) = \{x(t) \in R^n, t \in [t_0, t_f]\}$ – вектор состояния системы; $y(\cdot) = \{Y(t) \in R^m, t \in [t_0, t_f]\}$ – выход системы; $u(\cdot) = \{u(t) \in R^r, t \in [t_0, t_f]\}$ – управление; $w(\cdot) = \{w(t) \in R^k, t \in [t_0, t_f]\}$ – ограниченное возмущение, будем считать, что $r \geq k$; $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ – непрерывные матрицы-функции.

Возмущение $w(t)$ трактуется как действие некоторого игрока противодействующему успешному выполнению задачи управления.

На управляющие воздействия $u(t)$ и $w(t)$ наложены ограничения вида:

$$u(t) \in R^r \subset U, \quad w(t) \in R^k \subset W. \quad (1.2)$$

Здесь U и W – компактные множества, множество W ограничено.

Образуем функционал, оценивающий эффективность управлений $u(t)$ и $w(t)$:

$$J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t) C^T Q C x(t) + u^T(t) R u(t) - w^T(t) P w(t)\} dt. \quad (1.3)$$

Здесь $Q = Q^T$, $R = R^T$ и $P = P^T$ – положительно определенные матрицы. Отметим, что параметрические значения этих матриц будут определяться в связи с удовлетворением заданных ограничений, наложенных на управляющие воздействия (1.2) и выполнением условий равномерной асимптотической устойчивости управляемой системы.

Предположение 1.1. О свойствах функции $f(x, u, w)$ и функционала $J(x, u, w)$:

- 1) функция $f(x, u, w) = (f(x(t)) + g_1(x(t))w(t) + g_2(x(t))u(t))$ равномерно непрерывна на $R^n \times U \times W$;
- 2) функция $f(x, u, w) = (f(x(t)) + g_1(x(t))w(t) + g_2(x(t))u(t))$ ограничена, т.е.

$$\left| f(x(t)) + g_1(x(t))w(t) + g_2(x(t))u(t) \right| \leq M$$

для всех $(t, x, u, w) \in [t_0, t_f] \times R^n \times U \times W$;

- 3) функция $f(x, u, w) = (f(x(t)) + g_1(x(t))w(t) + g_2(x(t))u(t))$ отвечает условию Липшица, т.е.

$$\left| f(x(t_1), u(t), w(t)) - f(x(t_2), u(t), w(t)) \right| \leq N(|t_1 - t_2| + |x(t_1) - x(t_2)|)$$

для всех $(t_i, x, u, w) \in [t_0, t_f] \times R^n \times U \times W$, $i = 1, 2$;

- 4) функционал $J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot))$ ограничен и непрерывен по Липшицу

$$\left| \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t) C^T Q C x(t) + u^T(t) R u(t) - w^T(t) P w(t)\} dt \right| \leq C_0;$$

- 5) существуют такие управления $u(t, x(t)) \subset U$ и $w(t, x(t)) \subset W$, что каждое состояние $x_0 \in X_0$ в каждый момент t_0 на интервале существования решения системы (1.1) полностью управляемо [16].

Задача дифференциальной игры двух игроков G_u и G_w рассматривается в статье как проблема оптимального управления, организованного с использованием принципа обратной связи по состоянию, т.е. в зависимости от текущей позиции

$(t, x(t))$. Пусть элемент $\xi = (x(t), u(t, x), w(t, x), t_0, t_f)$, для которого выполнены все указанные условия и ограничения задачи дифференциальной игры, является допустимым управляемым процессом. Задача управления заключается в построении оптимальной стратегии с нулевой суммой, т.е. в нахождении допустимого управляемого процесса $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t, x), w^0(t, x), t_0, t_f)$, при котором выполняется условие Айзекса:

$$\min_{u \in U} \max_{w \in W} J(x, u, w) = J(x^0, u^0, w^0) = \max_{w \in W} \min_{u \in U} J(x, u, w).$$

1.2. Оптимальное решение задачи дифференциальной игры с нулевой суммой

Предположение 1.2. Условия существования оптимального решения задачи (1.1)-(1.3):

- 1) пусть $u^0(t) = u^0(t, x(t)) \in U \subset R^r$ и $w^0(t) = w^0(t, x(t)) \in W \subset R^k$, соответствующие оптимальному управляемому процессу $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t, x), w^0(t, x), t_0, t_f)$. Тогда траектория $x^0(t)$ определяется, в силу (1.1), решением следующего уравнения:

$$\frac{d}{dt} x^0(t) = f(x^0(t)) + g_1(x^0(t))u^0(t) + g_2(x^0(t))w^0(t), \quad x^0(t_0) = x_0, \\ y^0(t) = Cx^0(t);$$

- 2) если $u(t, x(t)) \neq u^0(t, x(t)) \subset U$ и $w(t, x(t)) \neq w^0(t, x(t)) \subset W$ – любые управления такие, что соответствующая им траектория $x(t)$ определяется, в силу (1.1), решением уравнения:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))u(t) + g_2(x(t))w(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t),$$

$$\text{то } J(x_t^0, u_t^0, w) \leq J(x^0, u^0, w^0) \leq J(x_A^0, u, w_A^0).$$

Здесь $J(x^0, u^0, w^0)$, $u^0(t) \in U$, $w^0(t) \in W$ – значения функционала качества дифференциальной игры с нулевой суммой (седловой точки), $J(x_H^0, u_H^0, w)$, где $u_H^0(t) \in U$, $w(t) \in W$, нижнее значение функционала (гарантирующее управление $u_H^0(t)$), $J(x_B^0, u, w_B^0)$, $u(t) \in U$, $w_B^0(t) \in W$ – верхнее значение функционала.

При выполнении вышеприведенных предположений относительно задачи (1.1)-(1.3) для синтеза оптимальных управлений введем функцию Беллмана-Айзекса [16, 36, 38] $V: (t, x(t)) \rightarrow V(t, x(t))$

$$V(t, x(t)) = \inf_{u \in U} \sup_{w \in W} J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)), \quad (1.4)$$

где управления $u(t, x(t))$, $w(t, x(t))$, $t \in [t_0, t_f]$ удовлетворяют ограничениям (1.2), а соответствующая им траектория $x(t)$ определена на всем интервале $[t_0, t_f]$.

В силу сделанных выше предположений для задачи (1.1)-(1.3) существует положительно определенная дважды дифференцируемая функция $V(t, x(t)): R^n \rightarrow R$, удовлетворяющая уравнению Беллмана-Айзекса [16, 36]:

$$V^0(t, x(t)) = \min_{u \in U} \max_{w \in W} H(x(t), u(t), w(t), V_x(t, x(t))),$$

где H – гамильтониан

$$H(x(t), u(t), w(t), V_x(t, x(t))) = \\ = V_x(t, x(t)) \left\{ f(x(t)) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t) \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ x^T(t) C^T Q C x(t) + u^T(t) R u(t) - w^T(t) P w(t) \right\}. \quad (1.5)$$

Оптимальные управления $u^0(t, x)$ и $w^0(t, x)$ в задаче (1.1) - (1.3), в случае отсутствия ограничений на управления, являются точкой стационарности гамильтониана (1.5) [16, 38] и определяются соотношениями:

$$u(t, x) = -R^{-1} g^T(x(t)) \{V_x(t, x(t))\}^T, \\ w(t, x) = P^{-1} g_1^T(x(t)) \{V_x(t, x(t))\}^T. \quad (1.6)$$

Учет ограничений, накладываемых на ресурсы игроков, при которых достигается цель управления, рассмотрен далее.

Соответствующая траектория системы (1.1) с управлениями (1.6) является решением уравнения:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t)) \{V_x(t, x(t))\}^T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.7) \\ y(t) = Cx(t),$$

где

$$\Pi(x) = g_2(x(t))R^{-1}g_2^T(x(t)) - g_1(x(t))P^{-1}g_1^T(x(t)), \quad (1.8)$$

и вектор $\{V_x(t, x(t))\}^T$ отыскивается решением уравнения Беллмана-Айзекса

$$V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t))f(x(t)) - \\ - \frac{1}{2} V_x(t, x(t)) \Pi(x(t)) \{V_x(t, x(t))\}^T + \\ + \frac{1}{2} x^T(t) C^T Q C x(t) = 0, \quad (1.9)$$

$$V(t_f, x(t_f)) = 0, \quad (t, x) \in [t_0, t_f] \times R^n.$$

Таким образом, проблема нахождения управлений (1.6) полностью зависит от успешного решения уравнения в частных производных (1.9).

Предположение 1.3. Матрица $\Pi(x) = g_2(x(t))R^{-1}g_2^T(x(t)) - g_1(x(t))P^{-1}g_1^T(x(t))$, по крайней мере, положительно полуопределенная.

Теорема 1.1. Система (1.7) равномерно асимптотически устойчива относительно седловой точки функционала, если и только если

$$V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t))f(x(t)) \leq -\frac{1}{2}V_x(t, x(t))P(x(t))\{V_x(t, x(t))\}^T, \quad \forall x \neq 0,$$

где $P(x)$ – по крайней мере положительно полуопределенная матрица.

Доказательство теоремы 1.1. Из уравнения (1.9) не трудно получить модифицированное уравнение Беллмана-Айзекса

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} + \frac{1}{2}V_x(t, x(t))P(x(t))\{V_x(t, x(t))\}^T + \frac{1}{2}x^T(t)C^TQCx(t) = 0$$

или

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} = -\frac{1}{2}[V_x(t, x(t))P(x(t))\{V_x(t, x(t))\}^T + x^T(t)C^TQCx(t)] = 0.$$

Откуда $dV(t, x(t))/dt \leq 0$, так как

$$[V_x(t, x(t))P(x(t))\{V_x(t, x(t))\}^T + x^T(t)C^TQCx(t)] \geq 0.$$

Таким образом, в силу второй теоремы Ляпунова следует, что система (1.7), где вектор $\{V_x(t, x(t))\}$ определяется решением уравнения (1.9), равномерно асимптотически устойчива относительно седловой точки функционала:

$$J(x_H^0, u_H^0, w) \leq J(x^0, u^0, w^0) \leq J(x_B^0, u, w_B^0).$$

Отметим, что по крайней мере положительная полуопределенность матрицы $P(x)$ зависит не только от параметров системы $g_1(x(t))$ и $g_2(x(t))$, но и от матриц штрафа R и D в функционале (1.3). Таким образом, эти матрицы штрафов должны назначаться так, чтобы параметры регуляторов игроков G_u и G_w отвечали бы условию (1.2), т.е. $u(t, x(t)) \in U$, $w(t, x(t)) \in W$.

Теорема 1.2. Пусть существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $V^0(t, x(t))$ задачи (1.1) - (1.5) и существуют управления такие, что

$$\begin{aligned} & V_t^0(t, x(t)) + \\ & + V_x^0(t, x(t))f(x^0(t)) - \frac{1}{2}V_x^0(t, x(t))P(x^0(t))\{V_x^0(t, x(t))\}^T + \\ & + \frac{1}{2}x^T(t)C^TQCx(t) = 0, \quad (1.10) \\ & V^0(t_f, x(t_f)) = 0, \quad (t, x) \in [t_0, t_f] \times R^n. \end{aligned}$$

Тогда управления $u^0(t, x(t))$ и $w^0(t, x(t))$, являющиеся оптимальными, а $V^0(t, x(t))$ есть соответствующая функция Беллмана-Айзекса.

Доказательство теоремы 1.2. Перепишем уравнение (1.10) в виде модифицированного уравнения Беллмана-Айзекса:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}V^0(t, x(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial V_x^0(t, x(t))}{\partial x}P(x(t))\left\{\frac{\partial V_x^0(t, x(t))}{\partial x}\right\}^T \\ & + \frac{1}{2}x^T(t)QC^TQCx(t) = 0, \quad (1.11) \\ & V(t_f, x(t_f)) = 0. \end{aligned}$$

Запишем функционал (1.3) с учетом (1.6) и (1.8):

$$\begin{aligned} & J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = \\ & = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ x^T(t)C^TQCx(t) + \frac{\partial V^0(x(t))}{\partial x}P(x(t))\left\{\frac{\partial V^0(x(t))}{\partial x}\right\}^T \right\} dt = \\ & = -\lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{d}{dt}V^0(t, x(t)) \right\} dt = \lim_{t_f \rightarrow \infty} [V^0(t_0, x(t_0)) - V^0(t_f, x(t_f))]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$J(x^0, u^0, w^0) = V^0(t_0, x(t_0)), \quad (1.12)$$

так как в силу (2.3) $V^0(t_f, x(t_f)) = 0$.

Пусть теперь управления $u(t, x)$ и $w(t, x)$ – любые отличные от (1.6), но удовлетворяющие ограничениям (1.2), а $x(t)$ соответствующее решение уравнения (1.1) с этими управлениями. Тогда, используя равенство (1.11), заключаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}V(t, x(t)) + \frac{1}{2}V_x(t, x(t))P(x(t))\{V_x(t, x(t))\}^T + \\ & + \frac{1}{2}x^T(t)QC^TQCx(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$J(x, u, w) \neq V^0(t_0, x(t_0)). \quad (1.13)$$

Нетрудно видеть, что сравнение (1.12) и (1.13) показывает:

$$J(x_i^0, u_i^0, w) \leq V^0(x(t_0)) \leq J(x_A^0, u, w_A^0).$$

Тем самым оптимальность управлений $u^0(t, x)$ и $w^0(t, x)$ в задаче дифференциальной игры с нулевой суммой установлена.

2. Алгебраический метод решения уравнения Беллмана-Айзекса

Решение соответствующего уравнения Беллмана-Айзекса ищется с применением алгебраического метода, изложенного в [37, 38] и обобщенного в настоящей статье на случай дифференциальных игр. Докажем следующую лемму:

Лемма 2.1. Пусть $x \in R^n$ – действительный вектор, $\{V_x(x(t))\}^T$, $f(x(t)) \in R^n$ – действительные

вектор-функции, $x^T(t)C^TQCx(t) > 0$, $x(t) \neq 0$ – действительная функция, определенная на R^n и $\Pi(x(t))$ – действительная положительно полуопределенная матрица. Тогда вектор $V_x(x(t))$ является решением функционального уравнения:

$$2V_x(x(t))f(x(t)) - V_x(x(t))\Pi(x(t))\{V_x(x(t))\}^T + x^T(t)C^TQCx(t) = 0 \quad (2.1)$$

если и только если

$$f^T(x(t))[\Pi^+(x(t))]^T f(x(t)) > x^T(t)C^TQCx(t), \quad (2.2)$$

где $\Pi^+(x(t))$ – псевдообратная матрица от $\Pi(x(t))$. В этом случае решением уравнения (2.1) относительно $\{V_x(x(t))\}^T$ является следующее выражение:

$$\{V_x(x(t))\}^T = -\Pi^+(x(t))f(x(t)) + K^+(x(t))\beta(x(t)), \quad (2.3)$$

где

$$\beta(x(t)) = [f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) - x^T(t)C^TQCx(t)]^{1/2}. \quad (2.4)$$

Здесь $\Pi^+(x(t))$ – положительно полуопределенная матрица размером $n \times n$, представляемая так, что $\Pi^+(x(t)) = K^+(x(t))(K^+(x(t)))^T = (K^+(x(t)))^T K^+(x(t))$, где $K^+(x(t))$ матрица размером $n \times n$; $\Pi^+(x(t))$ и $K^+(x(t))$ – псевдо-обратные матрицы (по Мору-Пенроузу) [39,40] от $\Pi(x(t))$, и $K(x(t))$.

Отметим, что условие (2.2) предопределяет ограничения, которым должны отвечать управления $u(t, x) \in U$ и $w(t, x) \in W$, учитывая что значения элементов матрицы $\Pi^+(x(t))$, как видно из (1.8), определяют матрицы штрафов R, P , кроме того на выполнение этого условия влияет и выбор значений параметров матрицы Q .

Доказательство Леммы 2.1. Подставив (2.3) в (2.1), будем иметь:

$$f^T(x)[\Pi^+(x)]^T \Pi(x)\Pi^+(x)f(x) - f^T(x)[\Pi^+(x)]^T \Pi(x)K^+(x)\beta(x) - \beta(x)[K^+(x)]^T \Pi(x)\Pi^+(x)f(x) + \beta^2(x)[K^+(x)]^T \Pi(x)K^+(x) - 2f^T(x)[\Pi^+(x)]^T f(x) + 2\beta(x)[K^+(x)]^T f(x) - x^T(t)C^TQCx(t) = 0.$$

Учитывая [40,41], что $\Pi^+ \Pi \Pi^+ = \Pi^+$, и $[K^+]^T \Pi \Pi^+ = [KK^+]^T = K^+$, т.е. $(\Pi \Pi^+) = I^*$, имеем, принимая во внимание, что $\Pi = KK^+$, где матрица K положительно полуопределенная,

$[K^+]^T \Pi K^+ = [KK^+]^T K^+ = I^*$, где I^* – диагональная матрица, в диагонали которой находится $n-r$ единичных элементов и r нулевых элементов. Учитывая свойства матриц из вышестоящего уравнения, будем иметь:

$$f^T(x)[\Pi^+(x)]^T f(x) + f^T(x)K^+(x)\beta(x) + \beta(x)[K^+(x)]^T f(x) + \beta^2(x) - 2f^T(x)[\Pi^+(x)]^T f(x) - 2\beta(x)[K^+(x)]^T f(x) - x^T(t)C^TQCx(t) = 0$$

или

$$\beta^2(x(t)) = f^T(x(t))[\Pi^+(x(t))]^T f(x(t)) - x^T(t)C^TQCx(t). \quad (2.5)$$

Из последнего уравнения имеем:

$$\beta(x(t)) = [f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) - x^T(t)C^TQCx(t)]^{1/2}. \quad (2.6)$$

Полученное выражение определяет достаточные условия существования решения уравнения (2.1) относительно вектора $\{V_x(x(t))\}^T$.

Для отыскания необходимых условий разрешимости функционального уравнения (2.1) используем уравнение (2.3). Для этого добавим и вычтем в левой части уравнения (2.5), выражение $f^T(x)K^+(x)\beta(x)$. Будем иметь:

$$\beta^2(x(t)) - [-f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) + f^T(x(t))K^+(x(t))\beta(x(t))] + x^T(t)C^TQCx(t) + f^T(x(t))K^+(x(t))\beta(x(t)) = 0$$

Учитывая, что из (2.3) следует, что

$$K^+(x(t))\beta(x(t)) = \{V_x(x(t))\}^T + \Pi^+(x(t))f(x(t)),$$

получаем из предыдущего уравнения:

$$n\beta^2(x(t)) - f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) - x^T(t)C^TQCx(t) + f^T(x(t))\{\partial V(x(t))/\partial x\}^T - f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) - f^T(x(t))\{\partial V(x(t))/\partial x\}^T + f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) = 0$$

или

$$\beta^2(x(t)) - f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) + x^T(t)C^TQCx(t) = 0.$$

Как видно, полученное уравнение не что иное как уравнение (2.5). На этом доказательство необходимого условия выполнения Леммы 2.1 завершено.

Добавление к Лемме 2.1. Пусть $\Pi(x(t))$ для всех $x(t) \in X$ – положительно определенная действительная матрица. Тогда уравнение (2.1) имеет решение относительно $\{V_x(x(t))\}^T$ в виде

$$\{V_x(x(t))\}^T = -\Pi^{-1}(x(t))f(x(t)) + K^{-1}(x(t))\beta(x(t)), \quad (2.7)$$

где

$$\beta(x(t)) = [f^T(x(t))\Pi^{-1}(x(t))f(x(t)) - x^T(t)C^TQCx(t)]^{1/2}.$$

Запишем систему (2.1) с управлением (3.7):

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ \vdots \\ f_{r-1}(x(t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_r(x(t)) \\ \vdots \\ k_n(x(t)) \end{bmatrix} \beta(x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $k_i(x(t))$, $i=r, \dots, n$ соответствующие строки матрицы $K(x(t))$, или

$$\frac{d}{dt}x(t) = I^* f(x(t)) - K(x(t))\beta(x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.8)$$

Следует отметить, что уравнение (2.1) относительно $V_x(x(t))$ имеет два решения, одно из которых с объектом (1.1), минимизирует функционал (1.3). Для определения решения уравнения (2.1), которое обеспечивает выполнение поставленной задачи, введем функцию Ляпунова:

$$V_L(\tilde{x}(t)) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) \tilde{x}(t), \quad (2.9)$$

где $\tilde{x}(t)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = I^* f(\tilde{x}(t)) - K(\tilde{x}(t))\beta(\tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0. \quad (2.10)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_L(\tilde{x}(t)) &= \tilde{x}^T(t) [f^*(\tilde{x}(t)) - K(\tilde{x}(t))\beta(\tilde{x}(t))] = \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \tilde{x}_i(t) f_i(\tilde{x}(t)) - \sum_{j=r}^n \tilde{x}_j(t) \left\{ \sum_{i=1}^n k_{ji}(\tilde{x}(t)) \right\} \beta(\tilde{x}(t)) < 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $\sum_{i=1}^n k_{ji}(\tilde{x}(t))$ – сумма всех элементов

j -строки матрицы $K(\tilde{x}(t))$. Из полученного условия можно видеть, что устойчивость системе (2.10) должно обеспечивать слагаемое уравнения (2.11), в которое входит синтезированное управление, т.е.

$$\begin{aligned} - \sum_{j=r}^{n-r} \tilde{x}_j(t) \left\{ \sum_{i=1}^n k_{ji}(\tilde{x}(t)) \right\} \beta(\tilde{x}(t)) < 0, \quad j = m, \dots, n \\ \text{при } \tilde{x}(t) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для определения арифметического знака перед функцией $\sum_{i=r} \tilde{x}_j(t) k_{ji}(\tilde{x}(t)) \beta(\tilde{x}(t))$ примем $\beta(\tilde{x}(t)) > 0$. Тогда условие (2.12) будет выполняться, если

$$\text{sign}\{\tilde{x}_j(t)\} = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{i=1}^n k_{ji}(\tilde{x}(t)) > 0, \\ 0, & \text{if } \sum_{i=1}^n k_{ji}(\tilde{x}(t)) = 0, \\ -1, & \text{if } \sum_{i=1}^n k_{ji}(\tilde{x}(t)) < 0. \end{cases} \quad j = m, \dots, n. \quad (2.13)$$

Система (1.1) с соответствующим управлением и учетом полученных результатов принимает вид:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ \vdots \\ f_{r-1}(x(t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{sign}\{x_r(t)\} \sum_{i=1}^n k_{ri}(\tilde{x}(t)) \\ \vdots \\ \text{sign}\{x_n(t)\} \sum_{i=1}^n k_{ni}(\tilde{x}(t)) \end{bmatrix} \beta(x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.14)$$

Теорема 2.1. Пусть для системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x(t)) + g_1(x(t))w(t) + g_2(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ f, g_1, g_2 &: (t, x) \in [t_0, t_f] \times R^n \end{aligned}$$

с функционалом

$$J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) - w^T(t) P w(t)\} dt$$

существует положительно определенная дважды дифференцируемая функция $V(x(t)): R^n \rightarrow R$, определяемая решением уравнения Беллмана-Айзекса, где

$$\begin{aligned} \{V_x(x(t))\}^T &= -\Pi^+(x) f(x(t)) + \\ &+ K^+(x) \left(I_n \left[f^T(x(t)) \Pi^+(x(t)) f(x(t)) + x^T(t) Q x(t) \right]^{1/2} \right), \end{aligned}$$

$$\Pi^+(x(t)) = [g_2(x(t)) R^{-1} g_2^T(x(t)) - g_1(x(t)) P^{-1} g_1^T(x(t))]^{+}.$$

Тогда управления $w(t)$, $u(t)$, отвечающие ограничениям, при которых сохраняется условие (2.2), определяются выражениями

$$\begin{aligned} w(t) &= P^{-1} g_1^T(x(t)) \{V_x(x(t))\}^T, \\ u(t) &= -R^{-1} g_2^T(x(t)) \{V_x(x(t))\}^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

и траектория движения исходной системы $x(t)$ под воздействием управлений (2.14) определяется решением дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}x(t) = I^* f(x(t)) - \text{SIGN}\{x(t)\} K(x(t)) \beta(x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Введем вектор I_n , у которого верхние r элементов нулевые, а остальные $n-r$ единичные.

Доказательство теоремы 2.1. Как было показано выше, решением уравнения

$$\begin{aligned} 2\{V_x(x(t))\}^T f(x(t)) - \\ - V_x(x(t)) \Pi(x(t)) \{V_x(x(t))\}^T + \\ + x^T(t) Q x(t) = 0 \end{aligned}$$

относительно вектора $\{\partial V(x(t)) / \partial x\}^T$ является выражение

$$\begin{aligned} \{V_x(x(t))\}^T &= -\Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + \\ &+ K^{-1}(x(t)) \beta(x(t)). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (1.6), оптимальные управления $w(t)$, $u(t)$ дифференциальной игры и соответствующая траектория системы $x(t)$ описываются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} w(t) &= P^{-1} g_1^T(x(t)) \{ \Pi^+(x(t)) f(x(t)) + [\text{SIGN}\{x(t)\} K^+(x(t))] \beta(x(t)) \}, \\ u(t) &= -R^{-1} g_2^T(x(t)) \{ \Pi^+(x(t)) f(x(t)) + [\text{SIGN}\{x(t)\} K^+(x(t))] \beta(x(t)) \}, \\ \frac{d}{dt}x(t) &= I^* f(x(t)) - [\text{SIGN}\{x(t)\} K(x(t))] \beta(x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Теорема 2.2. Система (2.15) равномерно асимптотически устойчива относительно седловой

точки функционала, если и только если значения начальных условий системы $x(t_0)$ отвечают неравенству:

$$f^T(x(t_0))\left[P^+(x(t_0))\right]^T f(x(t_0)) - x^T(t_0)C^TQCx(t_0) > 0 \quad (2.17)$$

где $P(t, x(t))$ по крайней мере положительно полуопределенная матрица.

Доказательство теоремы 2.2 проводится с учетом Теоремы 2.1 и условия (2.2).

Ранее (Теорема 1.1) были определены условия назначения матриц штрафов R и D в функционале (1.3), при которых управления $u(t, x(t))$ и $w(t, x(t))$ отвечают наложенным ограничениям (2.2) и могут обеспечить оптимальное управление нелинейным объектом в задаче дифференциальной игры. Однако асимптотическая устойчивость нелинейной системы относительно седловой точки функционала зависит и от множества возможных начальных условий $x(t_0)$, при которых это свойство выполняется. Как видно из (2.16), мощность $|X_0|$ множества возможных начальных условий $x(t_0)$ зависит от назначения матрицы в функционале (1.3). Следовательно условие (2.16) предопределяет значение и соотношение ограничений U и W , при которых достигается цель управления: оптимальное управление нелинейным объектом в задаче дифференциальной игры с нулевой суммой.

3. Моделирование системы управления

В качестве примера использования полученных в работе результатов рассматривается задача управления синхронным генератором [41-43]. Динамическая система в пространстве состояний, в соответствии с (1.1), описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -p[(1+x_1(t))\sin(x_1(t)+d) - \sin(d)] - qx_2(t) \\ -rx_3(t) + s(\cos x_1(t)+d) - \cos(d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t),$$

$$x_1(t_0)=0, \quad x_2(t_0)=0, \quad x_3(t_0)=5,$$

то есть

$$f(x(t)) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -p[(1+x_1(t))\sin(x_1(t)+d) - \sin(d)] - qx_2(t) \\ -rx_3(t) + s(\cos x_1(t)+d) - \cos(d) \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_1(t) = \delta$ – угол нагрузки, $x_2(t) = \omega$ – угловая скорость ротора, $x_3(t) = e_q$ – переходная ЭДС, индуцируемая в фиктивной катушке якоря по оси q ; параметры $p=136.054$, $q=4$, $r=0.4091$, $s=0.2576$, $d=\pi/4$; $u(\cdot) \in \{u(t) \in R^1, t \in [t_0, t_f]\}$ – управление; $w(\cdot) \in \{w(t) \in R^1, t \in [t_0, t_f]\}$ – ограниченное возмущение, которое возникает вследствие

изменения внешней нагрузки и других не учитываемых явлений.

В функционале качества (1.3) соответствующие матрицы имеют значения:

$$Q = \text{diag}(1 \ 1 \ 1), \quad R = 0.6, \quad P = 1.$$

Ограничения, которым должны удовлетворять стабилизирующее управление $u(t)$ при действии возмущения $w(t)$, определяются следующим неравенством

$$f^T(x(t))P^+(x(t))f(x(t)) - x^T(t)C^TQCx(t) = 0.0995366 \left(\cos(x_1(t) + \pi/4) + 1.58812x_2(t) + 0.707107 \right)^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t) - x_3^2(t) > 0.$$

Управление $u(t)$ и возмущение $w(t)$, построенные с использованием алгебраического метода синтеза, имеют следующие описания:

$$u(t) = - \left[3.16963 \operatorname{sgn}(x_3(t)) \left\{ 0.0995366 \left(\cos(x_1(t) + \pi/4) + 1.58812x_2(t) + 0.707107 \right)^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t) - x_3^2(t) \right\}^{0.5} + \cos(x_1(t) + \pi/4) - 1.58812x_2(t) - 0.707107 \right] (0.644),$$

$$w(t) = \left[3.16963 \operatorname{sgn}(x_3(t)) \left\{ 0.0995366 \left(\cos(x_1(t) + \pi/4) + 1.58812x_2(t) + 0.707107 \right)^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t) - x_3^2(t) \right\}^{0.5} + \cos(x_1(t) + \pi/4) - 1.58812x_2(t) - 0.707107 \right] (0.3864).$$

На рис. 1 и 2 приведены графики переходных процессов при отсутствии управления и действии возмущения и при действии управляющих воздействий.

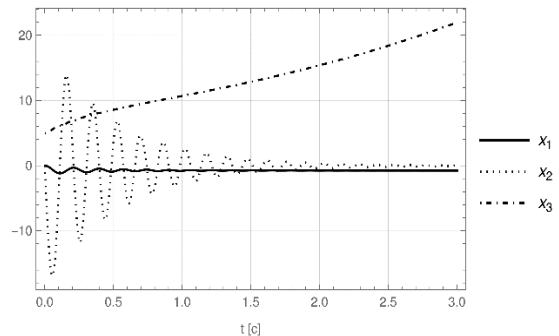


Рис. 1. Поведение x_1, x_2, x_3 под $w(t) \neq 0, u(t) \neq 0$

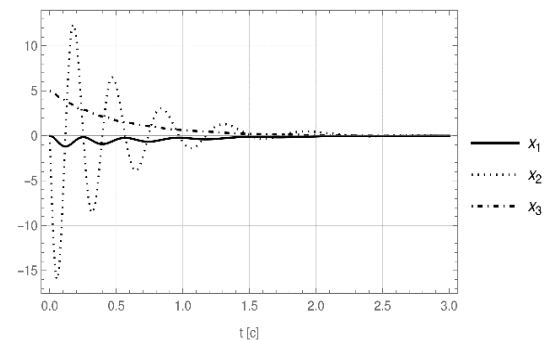


Рис. 2. Поведение x_1, x_2, x_3 при воздействии возмущения $w(t) \neq 0, u(t) \neq 0$

На рис. 3 и 4 приведены графики управляющих воздействий $u(t)$, $w(t)$ и изменения значений функционала качества при наличии и при отсутствии этих воздействий.

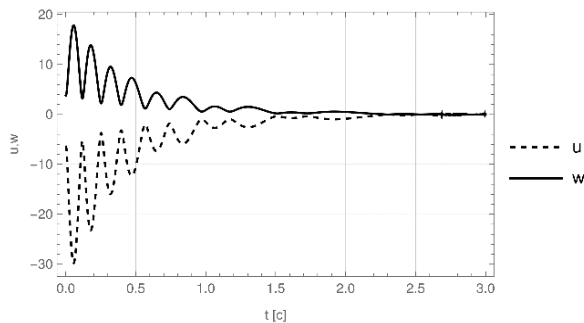


Рис. 3. Графики управлений $u(t)$, $w(t)$

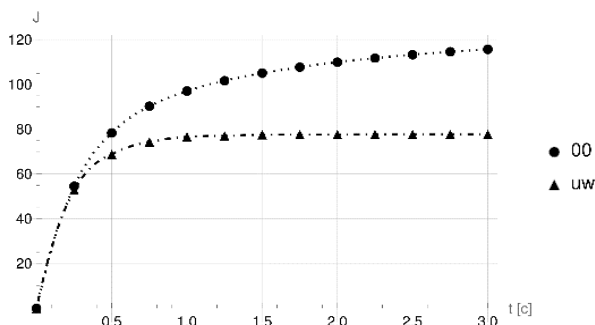


Рис. 4. Графики изменения функционала качества при отсутствии действий со стороны игроков (00) и наличии управляющих воздействий (uw)

Приведенные в статье результаты математического моделирования дифференциальной игры с нулевой суммой подтверждают эффективность синтезированных управлений.

Заключение

Дифференциальная игра с нулевой суммой рассмотрена в приложении к задаче стабилизации одного класса нелинейных объектов, находящихся под воздействием ограниченных возмущений. Реализация полученных управлений связана с проблемой нахождения решения скалярного уравнения в частных производных Беллмана-Айзека. Для решения этого уравнения предложен алгебраический метод, который может быть использован для нахождения управляющих воздействий нелинейными неопределенными объектами достаточно широкого класса и не только для дифференциальных игр с нулевой суммой. В работе показана связь мощностей множеств ограничений, накладываемых на управляющие воздействия, мощно-

стью множества начальных условий нелинейной системы и матрицами штрафов квадратичного функционала качества, при которых достигается оптимальное управление нелинейным объектом в задаче дифференциальной игры с нулевой суммой. Представленные результаты математического моделирования управления синхронным генератором, находящегося под воздействием ограниченных возмущений, демонстрируют возможность использования разработанного алгебраического метода решения уравнения Беллмана-Айзека в задаче дифференциальной игры.

Литература

1. Isaacs R.P. Games of Pursuit, Paper P-257. – RAND Corporation, Santa Monica, California. 1951. 14 p.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967. 479 с.
3. Breakwell, J.V. and Merz, A.W. Toward a Complete Solution of the Homicidal Chauffeur Game, Proceedings of the 1st International Conference on the Theory and Applications of Differential Games, Amherst, Massachusetts. 1969.
4. Bryson A.E., Yu-Chi Ho. Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control. Waltham, Massachusetts Toronto, London. 1969. 481 p.
5. Pontryagin L.S. Linear Differential Games I. Doklady Akademii Nauk SSSR. 1967;174(6):1278–1280.
6. Pontryagin L.S. Linear Differential Games II. Doklady Akademii Nauk SSSR. 1967;175(4):764–766.
7. Mishchenko E.F. and Satimov N.Yu. The problem of avoiding an encounter in differential games with nonlinear controls. Diff. Uravn. 1973;9(10):1792–1797.
8. Subbotin A.I. Generalization Solutions of First-Order PDFs. The Dynamical Optimization Perspective. Birkhauser. Boston. Basel. Berlin. 2003.
9. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1977. 224 с.
10. Вишневецкий Л.С., Меликян А.А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 613–620.
11. Melikyan, A.A. Geometry of Pursuit-Evasion Games on Two-Dimensional Manifolds // S. Orgensen, M. Quincampoix (eds.) Annals of the International Society of Dynamic Games. Boston: Birkhauser. 2007;9.
12. Wei Lin, Zhihua Qu, Marwan A. Simaan. A Design of Entrapment Strategies for the Distributed

- Pursuit-Evasion Game. // Preprints of the 18th World Congress IFAC, Milano (Italy) August 28 – September 2. 2011. P. 9334–9339.
13. Kumkov S.S., Le Menec S. and Patsko V.S. Model formulation of pursuit. problem with two pursuers and one evader,” *Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control*, Springer, Berlin, Heidelberg. 2013. P. 121–137.
 14. Reif J.H. The complexity of two-player games of incomplete information. *J. Comput. Syst. Sci.* 1984;29:274–301.
 15. Peters H. *Finite Games with Incomplete Information, Game Theory*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany. 2008. P. 59–71
 16. Афанасьев В.Н. Дифференциальные игры в задачах управления неопределенными объектами. М.: ЛЕНАНД. 2023. 400 с.
 17. Галеев А.А., Насонов И.А., Медведев А.И. Нейросетевой алгоритм перехвата машиной Дубинса целей, движущихся по известным траекториям. // *Автоматика и телемеханика*. 2023. Т. 84. № 3. С. 221–236.
 18. Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие по Нэшу. М.: URSS. 2010. 168 с.
 19. Roberta Martino and Viviana Ventre. An Analytic Network Process to Support Financial Decision-Making in the Context of Behavioural Finance. *Mathematics*. 2023;11(18): 3994.
 20. Jaume Belles-Sampera, Montserrat Guillen and Miguel Santolino. Haircut Capital Allocation as the Solution of a Quadratic Optimisation Problem. *Mathematics*. 2023;11(18): 3846.
 21. Васин А. А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: Макс-пресс. 2005. 272 с.
 22. McCarty N., Meirowitz A.A. *Political Game Theory: An Introduction*; Cambridge University Press: Cambridge, MA, USA. 2007. 446 p.
 23. Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // *Управление большими системами*. 2012. Вып. 37. С. 25–62.
 24. Kim S.-K. Advanced Drone Swarm Security by Using Blockchain Governance Game. *Mathematics*. 2022;10:3338.
 25. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010. 400 с.
 26. Jordan Kralev and Tsonyo Slavov. Robust μ -Controller for Automatic Glucose Regulation for Type I Diabetes Mellitus. *Mathematics*. 2023;11(18):3856.
 27. Трубецков Д.И. Феномен математической модели Лоттки – Вольтерры и сходных с ней // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19. № 2. С. 69–88.
 28. Buratto A., Cesaretto R., Zamarchi R. HIV vs. the Immune System: A Differential Game. *Math.* 2015;3(4):1139–1170.
 29. Masoud Saade, Sebastian Anița and Vitaly Volpert. Dynamics of Persistent Epidemic and Optimal Control of Vaccination. *Mathematics*. 2023;11(17):3770.
 30. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Д.Б. Математическая теория Автоматического управления. М.: ЛЕНАНД. 2019. 504 с.
 31. Теория управления. Дополнительные главы. Под редакцией Д.А. Новикова. М.: ЛЕНАНД. 2019. 552 с.
 32. Yiwei Wu, Hongyu Zhang, Fei Li, Shuaian Wang and Lu Zhen. Optimal Selection of Multi-Fuel Engines for Ships Considering Fuel Price Uncertainty. *Mathematics*. 2023;11(17):3621.
 33. Peters H. *Finite Games with Incomplete Information, Game Theory*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany. 2008. P. 59–71.
 34. Ho Y.C., Bryson A.E. and Baron S. Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1965;AC-10:385–389.
 35. Bellman R. *Dynamic Programming*. Princeton, New Jersey. 1957. 363 p.
 36. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
 37. Liu R. W. and Leake J. Inverse Lyapunov Problems. Technical Report No. EE6510, Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, August. 1965.
 38. Sain M.K. Won, C.-H. Spencer Jr. B.F. and Liberty S.R. Cumulates and Risk-Sensitive Control: A Cost Mean and Variance Theory with Application to Seismic Protection of Structures // *Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games*. 2000;5:427–459.
 39. Lancaster and Tismenetsky. *The Theory of Matrices: With Applications*. Elsevier. 1985. 570 p.
 40. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука. 1977. 224 с.
 41. Fontenla F., Haimovich H., Kofman E., Seron M. et al. Control design with guaranteed ultimate bound for feedback linearizable systems // *Proc. of the 17th World Congress IFAC*. Seoul, Korea. 2008. P. 242–247.

42. *Dehghani M., Nikraves S.K.* Nonlinear State Space Model Identification of Synchronous Generators // doi: 10.1016/j.epsr.2007.07.001.
43. *Karimzadeh A. et al.* Data-Driven Controller Design for a Synchronous Generator Connected to an Infinite Bus. // doi: 10.1109/ICCIA54998.2022.9737178.

Афанасьев Валерий Николаевич. Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Россия. Профессор-исследователь. Доктор технических наук. Область научных интересов: теория и практика управления динамическими процессами различной физической природы. E-mail: afanval@mail.ru (Ответственный за переписку).

Гаража Илья Александрович. Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Россия. Аспирант. Область научных интересов: теория и практика управления динамическими процессами различной физической природы. E-mail: garazha.ilya@yandex.ru

Synthesis of optimal controls in the problem of a differential game. Algebraic Method

V.N. Afanas'ev, I.A. Garazha

National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia

Abstract. A zero-sum differential game with a quadratic quality functional is considered as applied to the problem of controlling a nonlinear object under the influence of limited disturbances. It is assumed that the system is described by an ordinary differential equation with continuous functions, and the control and disturbance are implemented through feedback on the state of the object. The coordinate transformation forms a linear model of the object with constant parameters and control, which is synthesized using a quadratic quality functional with penalty matrices depending on the state. The main problem of implementing optimal control is associated with the problem of finding a solution to such an equation at the rate of functioning of the object. The inverse coordinate transformation forms optimal control based on the state of the original nonlinear object.

Keywords: differential games, optimal control, Bellman-Isaacs equation, pseudo-inverse matrices.

DOI: 10.14357/20790279250308 **EDN:** JCPGCT

References

1. *Isaacs R.P.* Games of Pursuit, Paper P-257. – RAND Corporation. Santa Monica: California. 1951. 14 p.
2. *Isaacs R.* Differential games. Moscow: Mir. 1967. 479 p.
3. *Breakwell J.V. and Merz A.W.* Toward a Complete Solution of the Homicidal Chauffeur Game, Proceedings of the 1st International Conference on the Theory and Applications of Differential Games, Amherst, Massachusetts. 1969.
4. *Bryson A.E., Yu-Chi Ho.* Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control. Waltham, Massachusetts Toronto, London. 1969. 481 p.
5. *Pontryagin L.S.* Linear Differential Games I. Doklady Akademii Nauk SSSR. 1967;174(6):1278–1280.
6. *Pontryagin L.S.* Linear Differential Games II. Doklady Akademii Nauk SSSR. 1967;175(4): 764–766.
7. *Mishchenko E.F. and Satimov N.Yu.* The problem of avoiding an encounter in differential games with nonlinear controls. 1973;9(10):1792–1797.
8. *Subbotin A.I.* Generalization Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Birkhauser. Boston. Basel. Berlin. 2003.
9. *Petrosyan L.A.* Differential pursuit games. L.: Leningrad University Press. 1977. 224 p. (in Russ).
10. *Vishnevetsky L.S., Melikyan A.A.* Optimal pursuit on a plane in the presence of an obstacle // Applied Mathematics and Mechanics. 1982;46(4): 613–620. (in Russ)

11. *Melikyan, A.A.* Geometry of Pursuit-Evasion Games on Two-Dimensional Manifolds // S. Orgensen, M. Quincampoix (eds.) Annals of the International Society of Dynamic Games. Boston: Birkhauser. 2007. 9 p.
12. *Wei Lin, Zhihua Qu, Marwan A. Simaan.* A Design of Entrapment Strategies for the Distributed Pursuit-Evasion Game. // Preprints of the 18th World Congress IFAC, Milano (Italy) August 28 – September 2. 2011. P. 9334–9339.
13. *Kumkov S.S., Le Menec S. and Patsko V.S.* Model formulation of pursuit. problem with two pursuers and one evader,” Advances in Aerospace Guidance, Nav-. igation and Control, Springer, Berlin, Heidelberg. 2013. P. 121–137.
14. *Reif J.H.* The complexity of two-player games of incomplete information. J. Comput. Syst. Sci. 1984;29:274–301.
15. *Peters H.* Finite Games with Incomplete Information, Game Theory; Springer: Berlin/ Heidelberg, Germany. 2008. P. 59–71.
16. *Afanasyev V.N.* Differential games in problems of control of uncertain objects. Moscow: LENAND. 2023. 400 p. (in Russ).
17. *Galyaev A.A., Yakhno V.P., Lysenko P.V. et al.* Optimization of Interception Plan for Rectilinearly Moving Targets. Autom Remote Control 2023;84: 1026–1038. <https://doi.org/10.1134/S000511792310003X>
18. *Zhukovsky V.I.* Introduction to differential games under uncertainty. Nash equilibrium. Moscow: URSS. 2010. 168 p. (in Russ)
19. *Roberta Martino and Viviana Ventre.* An Analytic Network Process to Support Financial Decision-Making in the Context of Behavioural Finance. Mathematics. 2023;11(18): 3994.
20. *Jaume Belles-Sampera, Montserrat Guillen and Miguel Santolino.* Haircut Capital Allocation as the Solution of a Quadratic Optimisation Problem. Mathematics. 2023;11(18): 3846.
21. *Vasin A.A., Morozov V.V.* Game theory and models of mathematical economics. Moscow: Max-press. 2005. 272 p. (in Russ).
22. *McCarty N., Meirowitz A.A.* Political Game Theory: An Introduction; Cambridge University Press: Cambridge, MA, USA. 2007. 446 p.
23. *Novikov D.A.* Hierarchical models of military operations // Management of large systems. 2012;37:25-62 (in Russ).
24. *Kim S.K.* Advanced Drone Swarm Security by Using Blockchain Governance Game. Mathematics. 2022;10:3338.
25. *Bratus A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P.* Dynamic systems and models of biology. Moscow: FIZMATLIT. 2010. 400 p. (in Russ).
26. *Jordan Kralev and Tsonyo Slavov.* Robust μ -Controller for Automatic Glucose Regulation for Type I Diabetes Mellitus. Mathematics. 2023;11(18):3856.
27. *Trubetskov D.I.* Phenomenon of the Lottka-Volterra mathematical model and similar ones // News of universities. Applied nonlinear dynamics. 2011;19(2):69-88 (in Russ).
28. *Buratto A., Cesaretto R., Zamarchi R.* HIV vs. the Immune System: A Differential Game. Math. 2015;3(4): 1139–1170.
29. *Masoud Saade, Sebastian Anița and Vitaly Volpert.* Dynamics of Persistent Epidemic and Optimal Control of Vaccination. Mathematics. 2023;11(17):3770.
30. *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Rapoport D.B.* Mathematical Theory of Automatic Control. Moscow: LENAND. 2019. 504 p. (in Russ).
31. *Control Theory. Additional Chapters.* Edited by D.A. Novikov. Moscow: LENAND. 2019. 552 p. (in Russ).
32. *Yiwei Wu, Hongyu Zhang, Fei Li, Shuaian Wang and Lu Zhen.* Optimal Selection of Multi-Fuel Engines for Ships Considering Fuel Price Uncertainty. Mathematics. 2023;11(17): 3621.
33. *Peters H.* Finite Games with Incomplete Information, Game Theory; Springer: Berlin/ Heidelberg, Germany. 2008. P. 59–71.
34. *Ho Y.C., Bryson A.E., and Baron S.* Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies. IEEE Trans. Automatic Control. 1965;AC-10: 385–389.
35. *Bellman R.* Dynamic Programming. Princeton, New Jersey. 1957. 363 p.
36. *Subbutin A.I.* Generalized solutions of first-order partial differential equations. Prospects of dynamic optimization. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Research. 2003. 336 p.
37. *Liu R.W. and Leake J.* Inverse Lyapunov Problems. Technical Report No. EE6510, Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, August. 1965.
38. *Sain, M.K. Won C.-H., Spencer Jr. B.F. and Liberty S.R.* Cumulates and Risk-Sensitive Control: A Cost Mean and Variance Theory with Application to Seismic Protection of Structures // Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games. 2000;5:427-459.
39. *Lancaster and Tismenetsky.* The Theory of Matrices: With Applications. Elsevier. 1985. 570 p.

40. *Albert A.* Regression, pseudo-inversion and recurrent estimation. Moscow: Nauka. 1977. 224 p.
41. *Fontenla F., Haimovich H., Kofman E., Seron M. et al.* Control design with guaranteed ultimate bound for feedback linearizable systems // Proc. of the 17th World Congress IFAC. Seoul, Korea. 2008. P. 242-247.
42. *Dehghani M., Nikraves S.K.* Nonlinear State Space Model Identification of Synchronous Generators // doi: 10.1016/j.epsr.2007.07.001.
43. *Karimzadeh A. et al.* Data-Driven Controller Design for a Synchronous Generator Connected to an Infinite Bus. // DOI: 10.1109/ICCIA54998.2022.9737178.

Valery N. Afanas'ev. National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia. Research Professor. Doctor of Technical Sciences. Research interests: Theory and practice of managing dynamic processes of various physical nature. E-mail: afanval@mail.ru

Ilya A. Garazha. Postgraduate student. Research interests: Theory and practice of managing dynamic processes of various physical nature. E-mail: garazha.ilya@yandex.ru