О каскадах бифуркаций по начальным условиям в нелинейных системах дифференциальных уравнений

Н.А. Магницкий

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление», Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе проведен аналитический и численный анализ четырехмерной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей устройство с двумя мемристорами. Показано, что система с фиксированными параметрами имеет бесконечное число неустойчивых особых точек, а также бесконечное число устойчивых периодических и хаотических «скрытых» аттракторов. Переход к хаосу в системе происходит посредством каскада бифуркаций по начальным условиям в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого (ФШМ). Доказано, что все хаотические «скрытые» аттракторы системы являются сложными сингулярными аттракторами в смысле теории ФШМ, а сама система обладает свойством хаотической мультистабильности.

Ключевые слова: *диссипативные системы, бифуркации по начальным условиям, динамический хаос, скрытый аттрактор, теория ФШМ, хаотическая мультистабильность.*

DOI: 10.14357/20790279250309 **EDN:** MHCMZU

Введение

Термин «бифуркация» принято связывать с плавным изменением некоторых параметров нелинейной системы дифференциальных уравнений, при котором происходит скачкообразное изменение фазового портрета системы. Значения параметров системы, при которых наблюдаются бифуркации, называются бифуркационными. Наиболее важными бифуркациями, встречающимися в подавляющем числе нелинейных систем дифференциальных уравнений как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, являются: бифуркация удвоения периода, седло-узловая бифуркация, бифуркация типа вилки и бифуркация Андронова-Хопфа. Причем две первые бифуркации порождают, как правило, так называемые каскады бифуркаций – бесконечные последовательности бифуркаций и соответствующие им последовательности бифуркационных параметров, приводящие к образованию в системе сингулярных хаотических аттракторов различной сложности. Наиболее известными универсальными каскадами бифуркаций являются: каскад бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума, субгармонический каскад бифуркаций Шарковского и гомоклинический каскад бифуркаций Магницкого [1-3]. Любой каскад бифуркаций связан с бесконечной последовательностью бифуркационных значений параметра, при которых динамика системы имеет бесконечную последовательность различных фазовых портретов. А так как значение параметра входит явным образом в систему уравнений, то этот процесс эквивалентен бесконечной последовательности различных систем уравнений, отличающихся значениями бифуркационного параметра. Естественно, возникает вопрос, а может ли одна система с фиксированными параметрами иметь фазовый портрет с бесконечным числом различных хаотических аттракторов?

В настоящей работе дается положительный ответ на поставленный вопрос. Приводится пример системы с фиксированными параметрами, имеющей бесконечный каскад бифуркаций по начальным данным. Доказано, что в этой системе уравнений одновременно существуют при разных начальных условиях бесконечное число устойчивых периодических и хаотических решений, то есть система обладает свойством *хаотической мультистабильности*.

1. Нелинейная модель устройства с двумя мемристорами

В работе [4] рассмотрена четырехмерная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая схему устройства с двумя мемристорами и следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= a[z - (-0.1 + x^2)y], \\ \dot{z} &= y - b(-0.1 + w^2)z + w, \\ \dot{w} &= -cz. \end{aligned} \tag{1}$$

Авторы работы [4] отмечают удивительные свойства динамики решений системы (1). Численно найдено, что при $a = 18$, $b = 0.3$, $c = 34.84$ система (1) генерирует большое количество сосуществующих периодических аттракторов из начальных условий (α, 0, 0, 0.1) (α > 1.2). Построено семь таких аттракторов при α = 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.701, 1.71. Установлено, что с увеличением α аттракторы смещаются вправо от оси x, становятся меньше и тоньше, что демонстрирует чрезвычайную чувствительность системы к начальным условиям. Сделан вывод, что система (1) может порождать бесконечное число сосуществующих аттракторов. Однако авторам работы [4] не удалось строго обосновать существование бесконечного числа аттракторов в системе (1), выяснить их природу, вид (периодический, хаотический) и закон их появления при изменении начальных условий.

В настоящей работе показано, что при некоторых фиксированных значениях параметров система (1) обладает бесконечным каскадом бифуркаций по начальным условиям в соответствии с порядком Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого и, следовательно, имеет бесконечное число устойчивых периодических орбит любого периода, а также бесконечное число хаотических (сингулярных) аттракторов.

1.1. Аналитическое исследование

Найдем дивергенцию правой части $\boldsymbol{F}(x,y,z,w)$ системы (1):

$$div\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_4}{\partial w}\right) = \\ = -a(-0.1 + x^2) - b(-0.1 + w^2).$$

Следовательно, система (1) диссипативна всюду в области $a(-0.1 + x^2) + b(-0.1 + w^2) > 0$, то есть по крайней мере в области $(|x| > \sqrt{0.1}) \cap (|w| > \sqrt{0.1})$ при положительных значениях параметров a и b. Особые точки системы (1) имеют вид: O(d,0,0,0), где d – произвольное действительное число. Следовательно, система имеет координатную ось x особых точек. Вычислим матрицу линеаризации системы в любой из особых точек O(d,0,0,0):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2axy & -a(-0.1 + x^2) & a & 0 \\ 0 & 1 & -b(-0.1 + w^2) & -2bwz + 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a(-0.1 + d^2) & a & 0 \\ 0 & 1 & 0.1b & 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя характеристический многочлен в любой особой точке O(d,0,0,0), найдем, что

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + g),$$

где $p = a(-0.1 + d^2) - 0.1b$; $q = (c - a - 0.1ab(-0.1 + d^2))$; $g = ca(-0.1 + d^2)$.

Так как необходимым условием устойчивости многочлена с вещественными коэффициентами является положительность всех его коэффициентов, а характеристический многочлен в любой особой точке O(d,0,0,0) имеет нулевой свободный член, то все особые точки системы (1) являются неустойчивыми. Таким образом, координатная ось x состоит из исключительно неустойчивых особых точек системы, а любой ее аттрактор является *скрытым аттрактором* [5-8].

Докажем простое утверждение, позволяющее перейти от бифуркаций по параметрам в нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений к бифуркациям по начальным условиям. Рассмотрим задачу Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами μ:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x(0) = x_0. \tag{3}$$

Сделаем замену переменных $x = \alpha u$ с некоторым скалярным параметром α. При этом система (3) перейдет в систему:

$$\dot{u} = \frac{1}{\alpha} f(\alpha u, \mu). \tag{4}$$

Зафиксируем начальное условие $u(0) = u_0$ системы (4) и будем менять в ней параметр α.

Лемма. Пусть в системе (4) параметр α является бифуркационным параметром, то есть при фиксированных значениях системных параметров μ существует последовательность бифуркационных значений параметра α, при которых решения системы (4) с фиксированным начальным условием u_0 сходятся к различным аттракторам. Тогда к тем же аттракторам будут сходиться решения системы (3) с различными начальными условиями $x_0 = \alpha u_0$.

Следствие. Если система (4) имеет бесконечный каскад бифуркаций по параметру α со значениями бифуркационного прараметра α_i, то исходная система (3) также имеет бесконечный каскад бифуркаций по начальным условиям со значениями $x_{0i} = \alpha_i u_0$. В этом случае система (3) при фиксированных значениях системных параметров μ содержит бесконечное число аттракторов, включая хаотические, то есть обладает свойством *хаотической мультистабильности*

Покажем, что условия Леммы и следствия к ней выполнены для системы уравнений (1).

1.2. Численный анализ

Сделаем в (1) замену переменных $x = \alpha u$, $y = \alpha v$, $z = \alpha r$, $w = \alpha s$. Система (1) перейдет в систему:

$$\begin{gathered}\dot{u} = v,\\ \dot{v} = a[r - (-0.1 + \alpha^2 u^2)v],\\ \dot{r} = v - b(-0.1 + \alpha^2 s^2)r + s,\\ \dot{s} = -cr \qquad (5)\end{gathered}$$

Покажем, что система (5) имеет полный каскад бифуркаций по параметру α в соответствии со сценарием Фейгенбаума – Шарковского – Магницкого. Параметры системы примем следующими: $a = 22.8$, $b = 0.3$, $c = 34$. Начальное условие во всех случаях возьмем следующим: $u_0 = 0.65$, $v_0 = 0.01$, $r_0 = s_0 = 0$. При α = 1 система (5) имеет устойчивый цикл, изображенный на рис. 1,а. При уменьшении значений параметра α этот цикл претерпевает полный каскад бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума, основные циклы которого и аттрактор Фейгенбаума, завершающий каскад, изображены на рис. 1.

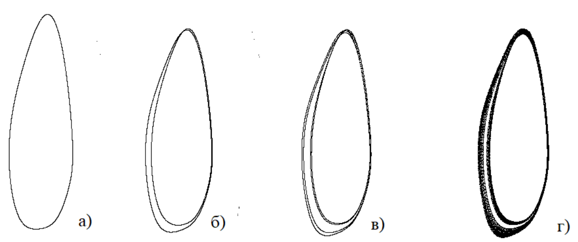

Рис.1. Проекции на плоскость (u, v) устойчивых циклов периодов один, два, четыре системы (5) при $\alpha = 1$ (а), $\alpha = 0.965$ (б), $\alpha = 0.96$ (в) и хаотического аттрактора Фейгенбаума при $\alpha = 0.9578$ (г), завершающего каскад бифуркаций удвоения периода

Дальнейшее усложнение динамики решений системы (5) при уменьшении значений бифуркационного параметра α происходит, как и во многих других нелинейных системах дифференциальных уравнений, через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского. Так, устойчивый цикл периода шесть субгармонического каскада C_6 наблюдается при α = 0.9573, периода пять C_5 – при α = 0.9556, периода три C_3 – при α = 0.953. Основные устойчивые циклы субгармонического каскада бифуркаций Шарковского и сложный сингулярный аттрактор, лежащий в окрестности цикла периода три, завершающего субгармонический каскад, представлены на рис. 2.

Дальнейшее усложнение динамики решений системы (5) при уменьшении значений бифуркационного параметра α происходит, как и во многих других нелинейных системах дифференциальных уравнений, через гомоклинический каскад бифуркаций Магницкого. Так, устойчивый цикл периода четыре гомоклинического каскада H_4 наблюдается при α = 0.948, периода шесть H_6 – при α = 0.9395, периода восемь H_8 – при α = 0.916. Основные устойчивые циклы гомоклинического каскада бифуркаций Магницкого и сложный сингулярный аттрактор, лежащий в окрестности гомоклинического контура, представлены на рис. 3.

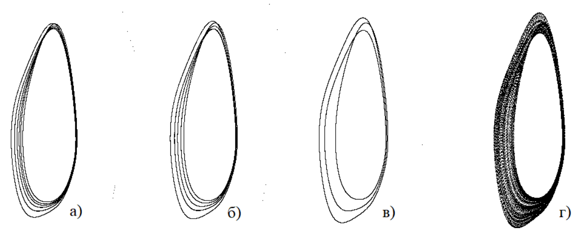

Рис.2. Проекции на плоскость (u, v) устойчивых циклов периодов шесть, пять, три системы (5) при $\alpha = 0.9573$ (а), $\alpha = 0.9556$ (б), $\alpha = 0.953$ (в) и сингулярного хаотического аттрактора при $\alpha = 0.95$ (г), лежащего в окрестности цикла периода три, завершающего субгармонический каскад бифуркаций

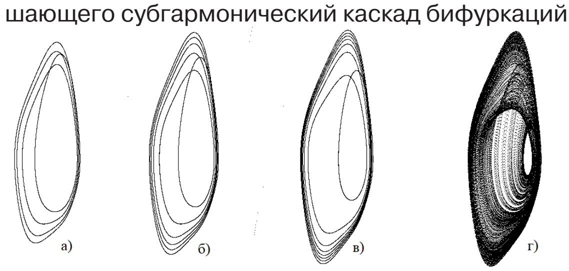

Рис.3. Проекции на плоскость (u, v) устойчивых циклов гомоклинического каскада бифуркаций периодов четыре, шесть, восемь системы (5) при $\alpha = 0.948$ (а), $\alpha = 0.9395$ (б), $\alpha = 0.916$ (в) и сложного сингулярного хаотического аттрактора при $\alpha = 0.9083$ (г), лежащего в окрестности гомоклинического контура, завершающего гомоклинический каскад бифуркаций

Таким образом, все аттракторы системы (5) всех трех каскадов бифуркаций в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием ФШМ, являются скрытыми аттракторами. А в соответствии с утверждением Леммы и следствия к ней, все эти же аттракторы являются аттракторами исходной системы (1) с постоянными коэффициентами и различными, зависящими от параметра α, начальными условиями: ($x_0 = \alpha u_0 = 0.65\alpha$, $y_0 = \alpha v_0 = 0.01\alpha$, $r_0 = s_0 = 0$). Следовательно, исходная система (1), имеет бесконечный каскад бифуркаций по начальным условиям в соответствии с порядком ФШМ и бесконечное число различных устойчивых периодических и хаотических аттракторов. То есть, система (1) обладает также свойством *хаотической мультистабильности.* Аттракторы системы (1) имеют тот же вид в проекции на плоскость (x, y), что и аттракторы системы (5) в проекции на плоскость (u, v), изображенные на рис. 1-3.

Заключение

В работе проведено аналитическое и численное исследование четырехмерной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей устройство с двумя мемристорами. Показано, что рассмотренная система с фиксированными параметрами имеет бесконечное число неустойчивых особых точек, а также бесконечное число устойчивых периодических и хаотических «скрытых» аттракторов. При этом переход к хаосу в системе происходит, как и в любых других нелинейных хаотических системах дифференциальных уравнений, в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого, только бифуркации происходят по начальным условиям, а не по явному или скрытому параметру системы. Доказано, что все хаотические «скрытые» аттракторы системы являются сложными сингулярными аттракторами в смысле теории ФШМ, а сама система является первым примером конечномерной системы нелинейных дифференциальных уравнений, обладающей как каскадом бифуркаций по начальным условиям, так и свойством *хаотической мультистабильности.* Ранее были известны только примеры нелинейных систем уравнений с частными производными, обладающих свойством хаотической мультистабильности, но имеющих каскады бифуркаций по скрытым параметрам [9-10].

Литература

1. *Magnitskii N.A.* Universal Bifurcation Chaos Theory and Its New Applications // Mathematics. 2023;11(11):2536. https://doi.org/10.3390/math11112536.
2. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М.: Ленанд. 2011. 320 с.
3. *Magnitskii N.A*. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. Rijeka: InTech. 2018. P. 197-215.
4. *Lai Q., Wan Z., Kengne L.K., Kuate P.D.K. and Chen C.* Two-Memristor-Based Chaotic System With Infinite Coexisting Attractors // IEEE Trans. Circuits and Systems – II. 2021;68(6): 2197-2201.
5. *Jafari S., Sprott J.C*. Simple chaotic flows with a line equilibrium // Chaos, Solitons & Fractals. 2013;57:79–84.
6. *Mohamed M.A., Bonny T., Sambas A. et al*. A Speech Cryptosystem Using the New Chaotic System with a Capsule-Shaped Equilibrium Curve // Computers, Materials & Continua. 2023;75(3): 5987-6006.
7. *Sambas1 A., Vaidyanathan S., Sen Zhang S. et al.* A New Double-Wing Chaotic System with Coexisting Attractors and Line Equilibrium: Bifurcation Analysis and Electronic Circuit Simulation // IEEE Access. 2017;7: 115454–115462. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2933456
8. *Magnitskii N.A.* On the nature of hidden attractors in nonlinear autonomous systems of differential equations // Proceedings of ISA RAS. 2023;73(3): 16-20. DOI: 10.14357/20790279230302
9. *Magnitskii N.A*. Traveling waves and space-time chaos in the Kuramoto–Sivashinsky equation. // Differential Equations. 2018;54(9): 1266-1270.
10. *Magnitskii N.A*. Traveling Waves and Space-Time Chaos in the Kawahara Equation. // JAND. 2025;14(2):247-252.

Магницкий Николай Александрович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник. Доктор физико-математических наук, профессор. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети, интегральные уравнения, математическое моделирование. E-mail: nikmagn@gmail.com

On cascades of bifurcations with respect to initial conditions in nonlinear systems of differential equations

N.A. Magnitskii

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we present an analytical and numerical analysis of a four-dimensional system of nonlinear ordinary differential equations describing a device with two memristors. It is shown that a system with fixed parameters has an infinite number of unstable singular points, as well as an infinite number of stable periodic and chaotic “hidden” attractors. The transition to chaos in the system occurs through a cascade of bifurcations with respect to the initial conditions in accordance with the universal Feigenbaum-Sharkovsky-Magnitskii bifurcation scenario. It is proven that all chaotic “hidden” attractors of the system are complex singular attractors in the sense of the FShM theory, and the system itself has the property of chaotic multistability.

Keywords: *dissipative systems, bifurcations with respect to initial conditions, dynamical chaos, hidden attractor, FShM theory, chaotic multistability.*

DOI: 10.14357/20790279250309 **EDN:** MHCMZU

References

1. *Magnitskii N.A.* Universal Bifurcation Chaos Theory and Its New Applications // Mathematics. 2023;11(11): 2536. https://doi.org/10.3390/math11112536.
2. *Magnitsky N.A.* Dynamic chaos theory. M.: Lenand. 2011. 320 p.
3. *Magnitskii N.A*. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter i Chaos Theory. Rijeka: InTech. 2018. P. 197-215.
4. *Lai Q., Wan Z., Kengne L.K., Kuate P.D.K. and Chen C.* Two-Memristor-Based Chaotic System With Infinite Coexisting Attractors // IEEE Trans. Circuits and Systems – II. 2021;68(6): 2197-2201.
5. *Jafari S., Sprott J.C*. Simple chaotic flows with a line equilibrium // Chaos, Solitons & Fractals. 2013;57:79–84.
6. *Mohamed M.A., Bonny T., Sambas A. et al*. A Speech Cryptosystem Using the New Chaotic System with a Capsule-Shaped Equilibrium Curve // Computers, Materials & Continua. 2023;75(3): 5987-6006
7. *Sambas1 A., Vaidyanathan S., Sen Zhang S. et al.* A New Double-Wing Chaotic System with Coexisting Attractors and Line Equilibrium: Bifurcation Analysis and Electronic Circuit Simulation // IEEE Access. 2017;7: 115454–115462. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2933456
8. *Magnitskii N.A.* On the nature of hidden attractors in nonlinear autonomous systems of differential equations//Proceedings of ISARAS. 2023;73(3):16-20. DOI: 10.14357/20790279230302
9. *Magnitskii N.A*. Traveling waves and space-time chaos in the Kuramoto–Sivashinsky equation. // Differential Equations. 2018;54(9): 1266-1270.
10. *Magnitskii N.A*. Traveling Waves and Space-Time Chaos in the Kawahara Equation. // JAND. 2025;14(2):247-252.

Nikolay A. Magnitskii. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks, integral equations, mathematical modeling. E-mail: nikmagn@gmail.com