Численное моделирование теплоконвективных процессов в ограниченной области

Н.В. Пестрякова

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление», Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. Описывается метод расчета двумерного нестационарного конвективного теплопереноса слабо сжимаемой жидкостью с нелинейными вязкостью и теплопроводностью в областях сложной формы для различных тепловых и динамических граничных условий. Рассмотрены случаи плоской и осевой симметрии. Применяется схема расщепления, линеаризованная по конвективным членам, записанным специальным образом. Используются переменные «функция тока – завихренность – температура». Граничные условия на стенке для завихренности реализуются безытерационно.

Ключевые слова: *уравнения Навье-Стокса, уравнение Пуассона, завихренность, функция тока, условие Тома, конвективный теплоперенос, нелинейная вязкость.*

DOI: 10.14357/20790279250310 **EDN:** BNDRUP

Введение

В настоящей работе, описанные в [1] результаты, обобщаются для вязкости, зависящей от координаты по пространству. В двумерной геометрии представлены случаи плоской и осевой симметрии. Изменение типа вязкости существенно расширяет область приложения описываемого метода, поскольку означает возможность численного моделирования не только ламинарного течения, но и более сложного – турбулентного. Этот режим конвективных процессов имеет место во многих технических и технологических задачах. В их число входит расчет воздухообмена в жилых и производственных помещениях [2-10], обладающих большим размером, что определяет именно турбулентный тип течения.

Представлена основанная на переменных «функция тока – завихренность – температура» методика расчета двумерного нестационарного конвективного теплопереноса слабо сжимаемой жидкостью при нелинейных вязкости и теплопроводности в ограниченных областях [11]. Постановка является более общей по сравнению с [12, 13].

Алгоритм является универсальным как для проточных, так и для замкнутых областей различной формы и широкого спектра динамических и тепловых граничных условий [14-16]. При нахождении численного решения используется линеаризованная по конвективному переносу разностная схема расщепления с безытерационной реализацией условий на стенках для завихренности.

1. Математическая постановка задачи

Рассматривается задача о двумерной смешанной (естественной и/или вынужденной) конвекции слабо сжимаемой вязкой теплопроводящей жидкости в проточной или непроточной односвязной области сложной формы для различных тепловых и динамических граничных условий. Математическая модель основывается на системе нестационарных уравнений Навье-Стокса совместно с уравнением переноса температуры T в приближении Буссинеска при нелинейных вязкости и теплопроводности.

Для скорости $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ и нормализованного на плотность давления p уравнение движения в поле объемной силы $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{v}+\mathrm{grad}p-\mathrm{div}(\nu\,\mathrm{grad}\mathbf{v})-g\beta T\mathbf{e}-\mathbf{F}=0,\\ \mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\Omega,\quad 0<t\le t_f,\end{gathered}\tag{1}$$

где T – отклонение температуры от равновесной, ν – нелинейный коэффициент кинематической вязкости, β – коэффициент объемного расширения, e = (0,1) определяет направление выталкивающей силы, g – ускорение свободного падения, Ω – односвязная область, t – время.

Уравнение (1) (следует дополнить уравнением несжимаемости:

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \le t_f. \qquad (2)$$

Перенос тепла нелинейной теплопроводностью и конвекцией с учетом объемного источника тепла $Q(\mathbf{x},t)$ описывается уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}T - \mathrm{div}(\kappa \mathrm{grad}T) - Q = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \le t_f, \qquad (3)$$

где κ – нелинейный коэффициент теплопроводности.

Тепловые и динамические граничные условия могут быть следующими.

На участках границы, соответствующих неподвижным твердым стенкам, могут выполняться условия прилипания и непротекания или условие инжекции жидкости:

$$\begin{aligned} &v_\tau(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, \quad 0 < t \le t_f, \\ &v_n(\mathbf{x},t) = v_{\mathrm{inj}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, \quad 0 < t \le t_f, \end{aligned} \qquad (4)$$

причем $v_{\mathrm{inj}} = 0$ в отсутствии инжекции; v_τ и v_n – касательная и нормальная к границе компоненты скорости.

Может также выполняться условие проскальзывания:

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, \quad 0 < t \le t_f. \qquad (5)$$

На стенках либо задается значение температуры (условие первого рода), либо они являются теплоизолированными (условие второго рода):

$$\begin{aligned} &aT(\mathbf{x},t) + \beta\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = 0, \ \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, \ 0 < t \le t_f, \\ &(\alpha \ne 0, \beta = 0) - \text{условие первого рода}, \\ &(\alpha = 0, \beta \ne 0) - \text{условие второго рода}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь и ниже $\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к поверхности.

Для проточной области требуется задать условия в приточном и выходном отверстиях. В приточном отверстии задаются профили скорости и температуры:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{in}}, \quad 0 < t \le t_f, \\ &T(\mathbf{x},t) = T_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{in}}, \quad 0 < t \le t_f. \end{aligned} \qquad (7)$$

В выходном отверстии задаются «мягкие» условия (второго рода), соответствующие тому, что линии тока перпендикулярны плоскости выходного отверстия, а значения всех физических величин неизменны вдоль линий тока:

$$\begin{aligned} &v_\tau(\mathbf{x},t) = \frac{\partial v_n}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = 0, \\ &\mathbf{x} \in \partial\Omega_{\mathrm{out}}, \quad 0 < t \le t_f. \end{aligned} \qquad (8)$$

В осесимметричном случае необходимо задать условия на оси симметрии, ориентированной вдоль оси x_2:

$$\begin{aligned} &v_1(\mathbf{x},t) = \frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = 0, \\ &\mathbf{x} \in \partial\Omega_{ax}, \quad 0 < t \le t_f. \end{aligned} \qquad (9)$$

В начальный момент времени задаются некоторые поля течения и температуры:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ &T(\mathbf{x},0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \qquad (10)$$

В частности, жидкость может покоиться и иметь равновесную температуру:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ &T_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \qquad (11)$$

Перейдем к переменным «функция тока – завихренность». Компоненты скорости выражаются через функцию тока $\psi(x,t)$ следующим образом:

$$v_1 = (x_1)^{-k}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -(x_1)^{-k}\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \qquad (12)$$

Здесь и ниже $k = 0$ для плоской, $k = 1$ для осевой симметрии. Из (12) следует, что условие несжимаемости (2) всегда выполнено.

Завихренность определяем следующим образом:

$$\omega = (x_1)^{-k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right). \qquad (13)$$

С целью унификации записи конвективных слагаемых для произвольного вектора $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ определим дифференциальный оператор конвективного переноса $V(\mathbf{s})$:

$$\begin{aligned} &V(\mathbf{s}) = V(s_1) + V(s_2), \\ &V(s_1)\varphi = 0.5\left((x_1)^{-k}\frac{\partial}{\partial x_1}(s_1(x_1)^k\varphi) + s_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right), \\ &V(s_2)\varphi = 0.5\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(s_2\varphi) + s_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right). \end{aligned} \qquad (14)$$

С учетом (12)–(14) из уравнения для скорости можно получить выражение для завихренности:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial t} + V(\mathbf{v})\omega + D\omega - \Phi(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \le t_f, \\ &D\omega = -(x_1)^{-k}\frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1)^{-k}\nu^{1-k}\frac{\partial}{\partial x_1}((x_1)^{2k}\nu^k\omega)\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu^{1-k}\frac{\partial}{\partial x_2}(\nu^k\omega)\right), \\ &\Phi(\mathbf{x},t) = g\beta(x_1)^{-k}\frac{\partial T}{\partial x_1} + (x_1)^{-k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right). \end{aligned} \qquad (15)$$

Следует отметить, что уравнение (1) преобразуется точно в (15) только в линейном случае ($\nu = const$). В общем случае при преобразовании диффузионных членов возникают дополнительные слагаемые, содержащие пространственные производные первого и второго порядка от $v(x_1,x_2)$. Они практически не вычислимы, поскольку эмпирическая зависимость $v(x_1,x_2)$ не дает требуемой точности. Будем считать, что они малы, и ими можно пренебречь.

Из (12) и (13) получаем уравнение Пуассона:

$$\omega = \Lambda\psi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \le t_f,$$
$$\Lambda\psi = -(x_1)^{-k} \frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1)^{-k} \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - (x_1)^{-2k} \frac{\partial^2\psi}{(\partial x_2)^2}. \tag{16}$$

Уравнение температуры с учетом введенного оператора конвективного переноса имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V(\mathbf{v})T + \Delta T - Q = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \le t_f,$$
$$\Delta T = -(x_1)^{-k} \frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1)^{k} \kappa \frac{\partial T}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_2}\right). \tag{17}$$

Систему уравнений (15)–(17) следует дополнить начальными и граничными условиями, вытекающими из (4)–(11).

Все условия для температуры остаются без изменений.

Условия прилипания и непротекания или условие инжекции жидкости (4) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, \quad 0 < t \le t_f, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x},t) = \pm(x_1)^k v_{\text{inj}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, \quad 0 < t \le t_f, \tag{19}$$

причем $v_{\text{inj}} = 0$ в отсутствии инжекции.

Граничное условие Тома для завихренности на стенке определяется из разложения функции тока в ряд Тейлора в окрестности стенки с учетом уравнения Пуассона (16) и условия прилипания (18):

$$\omega_w = -\frac{1}{(x_{1w})^{2k}} \frac{2}{h_w^2} (\psi_{w \pm h_w} - \psi_w). \tag{20}$$

Здесь ψ_w и $\psi_{w\pm h_w}$ – значения функции тока на стенке и в точке, отстоящей на шаг h_w в направлении нормали.

Условие проскальзывания (5) принимает вид:

$$\omega(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, \quad 0 < t \le t_f. \tag{21}$$

В приточном отверстии с учетом входного профиля скорости (7) по формуле (12) определяется профиль функции тока, а с помощью уравнения Пуассона (16) – завихренность.

В выходном отверстии, учитывая (8), имеем следующие условия:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\text{out}}, \quad 0 < t \le t_f. \tag{22}$$

Отметим, что разность значений функции тока на стенке по обе стороны вентиляционного отверстия равна расходу воздуха через него.

Условия на оси симметрии следующие:

$$\omega(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{ax}, \quad 0 < t \le t_f. \tag{23}$$

В начальный момент времени задается температура внутри расчетной области, а также определяемые некоторым полем течения значения функции тока и завихренности:

$$\psi(\mathbf{x},0) = \psi_0(\mathbf{x}), \quad \omega(\mathbf{x},0) = \omega_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{24}$$

В частности, для покоящейся жидкости:

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad \omega_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{25}$$

Заметим, что стационарное решение получается в результате установления во времени и не зависит от выбора начального распределения, но время расчета тем меньше, чем ближе начальные данные к стационарному режиму.

Поставленная краевая задача (15)–(25) решается в произвольной односвязной составленной из прямоугольников области, ограничения на форму которой связаны с построением сетки, согласованной с границами.

В качестве последнего шага в преобразовании уравнений в частных производных, перед тем, как перейти к изложению конечно-разностного метода решения системы (15)–(25), отметим, что используемая далее линеаризованная разностная схема базируется на специальном представлении конвективных членов. Определим вектор **b**:

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2), \quad b_1 = (x_1)^{-k} \frac{\partial\omega}{\partial x_2}, \quad b_2 = -(x_1)^{-k} \frac{\partial\omega}{\partial x_1}. \tag{26}$$

Тогда из (12), (13), аналогично [17], можно записать конвективный перенос завихренности в виде:

$$V(\mathbf{v})\omega = -V(\mathbf{b})\psi, \tag{27}$$

т.е. конвективный перенос завихренности интерпретируется как некий эффективный перенос функции тока.

Следовательно, с учетом (16) и (26) можно записать уравнение для завихренности в виде выражения для функции тока:

$$\frac{\partial\Lambda\psi}{\partial t} - V(\mathbf{b})\Lambda\psi + D\Lambda\psi - \Phi(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \le t_f. \tag{28}$$

2. Разностный аналог задачи и методика решения

При численном решении краевой задачи (15)–(25) область непрерывного аргумента заменяется сеткой с постоянным шагом по времени и переменным по пространству:

$$\overline{w} = \overline{w}_\tau \times \overline{w}_h, \quad \overline{w}_\tau = \{t^n = n\tau\},$$
$$\overline{w}_h = \{(x_{1i}, x_{2j})\}, \quad x_{1i} = x_{1,i-1} + h_{1i}, \quad i = \overline{2, N_1},$$
$$x_{2j} = x_{2,j-1} + h_{2j}, \quad j = \overline{2, N_2},$$
$$\hbar_{1i} = \begin{cases} 0.5h_{11}, & i = 0, \\ 0.5(h_{1i} + h_{1,i+1}), & i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ 0.5h_{N_1}, & i = N_1, \end{cases} \tag{29}$$
$$\hbar_{2j} = \begin{cases} 0.5h_{21}, & j = 0, \\ 0.5(h_{2j} + h_{2,j+1}), & j = \overline{1, N_2 - 1}, \\ 0.5h_{N_2}, & j = N_2. \end{cases}$$

Прямоугольная согласованная сетка по пространству $\overline{w}_h = w_h \cup \partial w_h$ строится таким образом, чтобы она пересекалась с границей области только в узлах (w_h – множество внутренних узлов, ∂w_h – множество граничных узлов). В области больших градиентов (обычно у стенок) пространственная сетка сгущается в соответствующем направлении.

Поскольку сетка согласована с границей, форму расчетной области определяем в пространстве индексов узлов сетки.

Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются сеточные функции вида:

$$f_{ij} = f(x_{1i}, x_{2j}). \tag{30}$$

Все величины определяются в узлах сетки, кроме давления, вычисляемого в центрах сеточных ячеек, а также компонент скорости, которые отнесены к серединам соответствующих сторон контрольных объемов.

Для приближенных решений будем использовать те же обозначения, что и для точных.

Ниже используются следующие аппроксимации первых и вторых производных:

$$\varphi_{x_1} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_{1,i+1}}, \varphi_{\bar{x}_1} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h_{1i}}, \varphi_{\overset{\circ}{x}1} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\hbar_{1i}}$$
$$\varphi_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{1}{\hbar_{1i}}\left(\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_{1,i+1}} - \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h_{1i}}\right). \tag{31}$$

Отметим, что в (31) выражение первых производных через центральные разности (используемое ниже в конвективных членах), а также выражение для вторых производных имеют второй порядок аппроксимации.

Аппроксимируем оператор конвективного переноса следующим образом:

$$V(\mathbf{s}) = V(s_1) + V(s_2),$$
$$V(s_1)\varphi = \begin{cases} 0{,}5((x_1)^{-k}(s_1(x_1)^k\varphi)_{\overset{\circ}{x}1} + s_1\varphi_{\overset{\circ}{x}1}) \text{ при } k=0 \text{ для всех } x_1, \text{ при } k=1 \text{для } x_1>0 \\ 0, \text{ при } k=1 \text{ для } x_1=0 \end{cases} \tag{32}$$
$$V(s_2)\varphi = 0{,}5((s_2\varphi)_{\overset{\circ}{x}_2} + s_2\varphi_{\overset{\circ}{x}_2}).$$

При аппроксимации уравнения для температуры выделим множество граничных узлов с условием первого рода ∂w_h^{1T} и второго рода ∂w_h^{2T}. Конечно-разностный аналог уравнения (17) имеет следующий вид:

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} + V(\mathbf{v}^n)T^{n+1} + \Delta T^{n+1} - Q^n = R(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t),$$
$$\mathbf{x} \in w_h \cup \partial w_h^{2T}, \quad 0 < t \le t_f. \tag{33}$$

Функция $R(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)$ отлична от нуля только в узлах, приграничных к ∂w_h^{1T} и определяется значением температуры в граничных узлах. Сеточный диффузионный оператор в уравнении температуры задается следующим образом:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -(x_1)^{-k}((x_1)^k \kappa\varphi_{\bar{x}_1})_{x_1} - (\kappa\varphi_{\bar{x}_2})_{x_2}, \\ \text{при } k = 0 \text{ для всех } x_1, \text{ при } k = 1 \text{ для } x_1 > 0; \\ -\dfrac{4}{h_{12}}\kappa\varphi_{x_1} - (\kappa\varphi_{\bar{x}_2})_{x_2}, \quad \text{при } k = 1 \text{ для } x_1 = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Отметим, что на границе ∂w_h^{2T} при $x_1 > 0$ записанный в первой строке оператор $\Delta\varphi$ модифицируется с учетом условия второго рода для φ. При этом вводится фиктивный узел вне границы, отстоящий на шаг, равный приграничному, с температурой, равной значению в приграничном узле.

При аппроксимации уравнения (28) выделим три множества: множество граничных узлов на стенке ∂w_h^{w} (совпадает для функции тока и для завихренности), с условием второго рода для завихренности $\partial w_h^{2\omega}$ и для функции тока $\partial w_h^{2\psi}$. Конечно-разностный аналог уравнения (28) имеет вид:

$$\frac{\partial \Lambda\psi}{\partial t} - V(\mathbf{b})\Lambda\psi + D\Lambda\psi + W(x_1, x_2)(\psi - \psi_w) - \Phi(\mathbf{x}, t) = 0,$$
$$\mathbf{x} \in w_h \cup \partial w_h^{2\omega}, \quad 0 < t \le t_f. \tag{35}$$

Здесь в записанном для пристеночного узла уравнении из $D\Lambda\psi$ формально выделяется часть, относящаяся к значениям завихренности $\omega = \Lambda\psi$ на твердой стенке (согласно определению завихренности и формуле Тома , примененной на предложенной сетке (29)). Соответственно, сеточная функция $W(x_1, x_2)$ отлична от нуля только в пристеночных узлах:

$$W(x_1,x_2)=\begin{cases}(x_{1,w\pm1})^{-k}(x_{1,w\pm0,5})^{-k}\dfrac{2}{h_{1w}^2}, x_1=x_{1,w\pm1}, \mathbf{x}_w\in\partial w_w,\\ (x_1)^{-2k}\dfrac{2}{h_{2w}^2}, x_2=x_{2,w\pm1}, \mathbf{x}_w\in\partial w_w.\end{cases} \tag{36}$$

Конечно-разностный аналог диффузионного оператора уравнения для завихренности (15) имеет вид:

$$D\varphi=\begin{cases}-(x_1)^{-k}((x_1)^{-k}\nu^{1-k}((x_1)^{2k}\nu^k\varphi_{\bar{x}_1})_{x_1})-(\nu^{1-k}(\nu^k\varphi)_{\bar{x}_2})_{x_2},\\ \text{при } k=0 \text{ для всех } x_1, \text{ при } k=1 \text{ для } x_1>0;\\ -\dfrac{4}{h_{12}}\nu\varphi_{x_1}-((\nu\varphi)_{\bar{x}_2})_{x_2}, \quad \text{при } k=1 \text{ для } x_1=0.\end{cases} \tag{37}$$

Отметим, что на границе $\partial w_h^{2\omega}$ при $x_1>0$ записанный в первой строке оператор $D\varphi$ модифицируется аналогично диффузионному оператору $\Delta\varphi$ для уравнения температуры.

Разностная схема для решения уравнения (35) аналогично [17, 18] основана на естественной линеаризации, когда оператор $V(\mathbf{b})$ определяется решением на предыдущем временном слое. Используется чисто неявная факторизованная схема расщепления (аналог схемы Дугласа-Рекфорда [19]) с безытерационной реализацией граничных условий для вихря. На первом этапе решается следующее разностное уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\Lambda\psi^{n+1/2}-\Lambda\psi^n}{\tau}-V(\mathbf{b}^n)\psi^n+D\Lambda\psi^{n+1/2}+W(x_1,x_2)(\psi^n-\psi_w)-\Phi=0,\\ \mathbf{x}\in w_h\cup\partial w_h^{2\omega}, \quad 0<t\le t_f,\\ \Phi(\mathbf{x},t)=g\beta(x_1)^{-k}T_{\overset{\circ}{x}_1}^{n+1}+(x_1)^{-k}\left(F_{2\overset{\circ}{x}_1}^n-F_{1\overset{\circ}{x}_2}^n\right).\end{gathered} \tag{38}$$

Конвективный перенос и граничные условия для завихренности на стенке берутся с предыдущего временного слоя. В уравнение (38) вводится завихренность:

$$\begin{gathered}\frac{\omega^{n+1/2}-\omega^n}{\tau}-V(\mathbf{b}^n)\psi^n+D\omega^{n+1/2}+W(x_1,x_2)(\psi^n-\psi_w)-\Phi=0,\\ \mathbf{x}\in w_h\cup\partial w_h^{2\omega}, \quad 0<t\le t_f.\end{gathered} \tag{39}$$

На втором этапе проводится коррекция по конвективному переносу и граничному условию для завихренности на стенке:

$$\begin{gathered}\frac{\Lambda\psi^{n+1}-\Lambda\psi^{n+1/2}}{\tau}-(W(x_1,x_2)-V(\mathbf{b}^n))(\psi^{n+1}-\psi^n)=0,\\ \mathbf{x}\in w_h\cup\partial w_h^{2\psi}, \quad 0<t\le t_f.\end{gathered} \tag{40}$$

Сеточный аналог оператора Лапласа следующий:

$$\Lambda\varphi=-x_1^{-k}(x_1^{-k}\varphi_{\bar{x}_1})_{x_1}-x_1^{-2k}\varphi_{\bar{x}_2x_2}. \tag{41}$$

На границе $\partial w_h^{2\psi}$ оператор $\Lambda\varphi$ модифицируется аналогично диффузионному оператору $\Delta\varphi$ для уравнения температуры.

Приведем также сеточные аппроксимации следующих величин:

компонент скорости

$$v_1=(x_1)^{-k}\psi_{\overset{\circ}{x}_2}, \quad v_2=-(x_1)^{-k}\psi_{\overset{\circ}{x}_1}; \tag{42}$$

компонент вектора **b** в операторе конвективного переноса

$$b_1=(x_1)^{-k}\omega_{\overset{\circ}{x}_2}, \quad b_2=-(x_1)^{-k}\omega_{\overset{\circ}{x}_1}. \tag{43}$$

Алгоритм решения рассматриваемой задачи обеспечивает унификацию расчетов при различных конфигурациях области и граничных условий (в рамках допустимого класса). Иначе говоря, задание варианта не требует перетрансляции модулей класса вычислений. Данные, определяющие геометрию области и граничные условия, считываются в начале решения задачи. Последующие этапы являются универсальными для всего класса задач.

По известному полю решения на временном шаге n рассчитывается поле температуры T на шаге $n+1$. При этом сначала вычисляются пять диагоналей и правая часть разностного уравнения для температуры (33), и затем решается линейная система с несимметричной матрицей относительно температуры на очередном временном слое. На первом этапе использования чисто неявной факторизованной схемы (аналог схемы Дугласа-Рекфорда) из уравнения (39) находится новое распределение завихренности $\omega^{n+1/2}$ во внутренних узлах области с учетом полученного поля температуры T^{n+1}, тем самым конвективный перенос и граничное условие первого рода для вихря скорости берутся с предыдущего временного слоя. При этом сначала вычисляются пять диагоналей несимметричной матрицы и правая часть разностной схемы уравнения для завихренности, а затем решается линейная система с несимметричной матрицей относительно вихря скорости на промежуточном слое по времени. Второй этап состоит в коррекции по конвективному переносу и граничному условию для завихренности (40). При решении этой несамосопряженной эллиптической задачи для определения функции тока сначала вычисляются пять диагоналей и правая часть разностного уравнения для функции тока, и затем решается линейная система с несимметричной матрицей относительно функции тока ψ^{n+1} на очередном слое по времени. Из уравнения Пуассона по полю ψ^{n+1} определяются новые значения завихренности на очередном временном слое ω^{n+1}.

В качестве критерия сходимости берется малость невязки в норме L_2:

$$\left\{\sum_{i,j}(x_{1i})^k\left[\psi_{ij}^{n+1}-\psi_{ij}^{n}\right]^2\hbar_{1i}\hbar_{2j}\right\}^{1/2}/\tau<\varepsilon_{\psi},$$
$$\left\{\sum_{i,j}(x_{1i})^k\left[\omega_{ij}^{n+1}-\omega_{ij}^{n}\right]^2\hbar_{1i}\hbar_{2j}\right\}^{1/2}/\tau<\varepsilon_{\omega}, \quad (44)$$
$$\left\{\sum_{i,j}(x_{1i})^k\left[T_{ij}^{n+1}-T_{ij}^{n}\right]^2\hbar_{1i}\hbar_{2j}\right\}^{1/2}/\tau<\varepsilon_{T}.$$

Системы сеточных уравнений решались с помощью неявного итерационного метода вариационного типа, являющегося одним из обобщений на несамосопряженный случай методов группы сопряженных направлений [20].

Тестирование выполнено в плоской геометрии для линейной вязкости [1, 11]. Рассматривалась задача о свободной конвекции жидкости в замкнутой полости квадратного сечения. Нижняя и верхняя границы являлись теплоизолированными, левая и правая – изотермичными. Полученные поля течения и температуры соответствуют результатам аналогичных расчетов [18].

Проведено численное моделирование для задачи обтекания квадратной полости, расположенной на дне плоского канала. Выше полости по течению параметры входного потока соответствовали течению Пуазейля. На выходном участке задавались граничные условия второго рода. Рассматривались варианты как с равномерной инжекцией жидкости через основание полости, так и без нее. Поля течения соответствуют рассчитанным в работе [21].

Заключение

Разработанный алгоритм позволяет унифицировано проводить расчеты двумерного плоского и осесимметричного нестационарного конвективного теплопереноса в проточных и замкнутых областях сложной формы слабо сжимаемой жидкостью с нелинейной вязкостью и теплопроводностью. Рассмотрены различные тепловые и динамические граничные условия. При разностном решении применяется схема расщепления, линеаризованная по конвективным членам, записанным специальным образом. Граничные условия на стенке для завихренности реализуются безытерационно.

Литература

1. *Пестрякова Н.В.* Безытерационный метод расчета завихренности в ограниченной области // Труды ИСА РАН. 2024. Том 74. №1. С. 41-51. DOI: 10.14357/20790279240106.
2. *Гримитлин М.И.* Распределение воздуха в помещениях. 3-е изд., доп. и испр. СПб.: АВОК Северо-Запад. 2004. 320 с.
3. *Засимова М.А., Иванов Н.Г., Марков Д.* Численное моделирование циркуляции воздуха в помещении при подаче из плоской щели. I. Отработка применения вихреразрешающего подхода с использованием периодической постановки // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 3. С. 56–74.
4. *Засимова М.А., Иванов Н.Г., Марков Д.* Численное моделирование циркуляции воздуха в помещении при подаче из плоской щели. II. LES-расчеты для помещения конечной ширины. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 3. С. 75–92.
5. *Bennetsen J.C.* Numerical simulation of turbulent airflow in livestock buildings. – The Technical University of Denmark. The Department of Mathematical Modeling. Ph. D thesis. 1999. 205 p.
6. *Voight L.K.* Navier– Stokes simulations of airflow in rooms and around human body. – International Center for Indoor Environment and Energy, Technical University of Denmark. Department of Energy Engineering. Ph. D thesis. 2001. 169 p.
7. *Mora L., Gadgil A.J., Wurtz E.* Comparing zonal and CFD model predictions of isothermal indoor airflows to experimental data // Indoor Air. 2003;13(2):77–85.
8. *Rong L., Nielsen P.V.* Simulation with different turbulence models in an annex 20 room benchmark test using Ansys CFX 11.0. – Denmark, Aalborg University, Department of Civil Engineering. DCE Technical Report. 2008;46:16.
9. *Dreau J.L., Heiselberg P., Nielsen P.V.* Simulation with different turbulence models in an Annex 20 benchmark test using Star-CCM+. – Denmark, Aalborg University, Department of Civil Engineering. DCE Technical Report. 2013;147:22.
10. *Yuce B.E., Pulat E.* Forced, natural and mixed convection benchmark studies for indoor thermal environments // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2018;92:1–14.
11. *Гавриков М.Б., Пестрякова Н.В.* Численное моделирование конвективного теплопереноса

в ограниченной области. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. Препринт. 1997. № 28. 23 с.
12. *Рябенький В.С., Торгашов В.А.* Безытерационный способ решения неявной разностной схемы для уравнений Навье-Стокса в переменных: завихренность и функция тока // Математическое Моделирование. 1996. Т. 8. №10. С. 100-112.
13. *Ryaben'kii V.S., Torgashov V.A.* An Iteration-Free Approach to Solving the Navier–Stokes Equations by Implicit Finite Difference Schemes in the Vorticity-Stream Function Formulation. // Journal of Scientific Computing. Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature. 2019. https://doi.org/10.1007/s10915-019-00926-1
14. *Герасимов Б.П., Губарева Л.Б., Пестрякова Н.В.* Численное моделирование конвективно-диффузионных процессов в полости. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. Препринт. 1991. № 26. 17 с.
15. *Герасимов Б.П., Пестрякова Н.В.* Численное моделирование практических задач ламинарного воздухообмена. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 1991. Препринт №24. 18 с.
16. *Герасимов Б.П., Пестрякова Н.В.* Моделирование турбулентных режимов вентиляции помещений. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. Препринт. 1991. № 22. 25 с.
17. *Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Попков А.Г., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г.* Численное решение задач гидродинамики в переменных «функция тока, вихрь скорости, температура». М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. Препринт. 1993. № 22. 21 с.
18. *Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г.* Численное моделирование конвективных течений в переменных «функция тока, вихрь скорости, температура». М.: Институт математического моделирования РАН. Препринт. 1993. № 28.
19. *Douglas J., Rachford H.H.* On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables. // Trans. Amer. Math. Soc. 1956;82:421–439.
20. *Iliev O.P., Makarov M.M., Vassilevski P.S.* Performance of Certain Iterative Methods in Solving Implicit Difference Schemes for 2-D Navier-Stokes Equations. // Int. J. Numer. Methods Engng. 1992;33(7):465-1479.
21. *Джонсон Р., Данак А.* Теплообмен при ламинарном обтекании прямоугольной полости при наличии инжекции жидкости // Теплопередача. Серия С. 1976. Т. 98. № 2. С. 84–90.

Пестрякова Надежда Владимировна. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук., г. Москва, Россия. Ведущий научный сотрудник. Доктор технических наук. Область научных интересов: вычислительная математика и физика, распознавание образов. E-mail: NPestryakova@frccsc.ru

Noniterative implementation of the vorticity evaluation in a limited area

N.V. Pestryakova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. A method for calculating two-dimensional non-stationary convective heat transfer by a weakly compressible fluid with nonlinear viscosity and thermal conductivity in regions of complex shape for various thermal and dynamic boundary conditions is described. Cases of plane and axial symmetry are considered. A splitting scheme linearized by convective terms written in a special way is used. The variables “stream function - vorticity - temperature” are used. The boundary conditions on the wall for vorticity are realized non-iteratively.

Keywords: *Navier-Stokes equations, Poisson equation, vorticity, stream function, Thom condition, convective heat transfer, nonlinear viscosity*.

DOI: 10.14357/20790279250310 **EDN:** BNDRUP

References

1. *Pestryakova N.V.* Noniterative implementation of the vorticity evaluation in a limited area // Trudy ISA RUN. 2024;1(74):41-51. DOI: 10.14357/20790279240106.
2. *Grimitlin M.I.* Air distribution in the rooms. 3rd Ed. St. Petersburg: AVOK Severo-Zapad. 2004. 320 p.
3. *Zasimova M.A., Ivanov N.G., Markov D.* Numerical modeling of air circulation in a room when supplied from a flat slot. I. Testing the use of the eddy-resolving approach using periodic formulation. Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti CPbGPU. Fiziko-matematicheskiye nauki. 2020;13(3):56–74.
4. *Zasimova M.A., Ivanov N.G., Markov D.* Numerical modeling of air circulation in a room when supplied from a flat slot.II. LES-calculations for a room of finite width. Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti CPbGPU. Fiziko-matematicheskiye nauki. 2020;13(3):75–92.
5. *Bennetsen J.C.* Numerical simulation of turbulent airflow in livestock buildings. The Technical University of Denmark. The Department of Mathematical Modeling. Ph. D thesis. 1999. 205 p.
6. *Voight L.K.* Navier– Stokes simulations of airflow in rooms and around human body. International Center for Indoor Environment and Energy, Technical University of Denmark. Department of Energy Engineering. Ph. D thesis. 2001. 169 p.
7. *Mora L., Gadgil A.J., Wurtz E.* Comparing zonal and CFD model predictions of isothermal indoor airflows to experimental data Indoor Air. 2003;13 (2):77–85.
8. *Rong L., Nielsen P.V.* Simulation with different turbulence models in an annex 20 room benchmark test using Ansys CFX 11.0. Denmark, Aalborg University, Department of Civil Engineering. DCE Technical Report. 2008;46:16.
9. *Dreau J.L., Heiselberg P., Nielsen P.V.* Simulation with different turbulence models in an Annex 20 benchmark test using Star-CCM+. Denmark, Aalborg University, Department of Civil Engineering. DCE Technical Report. 2013;147:22.
10. *Yuce B.E., Pulat E.* Forced, natural and mixed convection benchmark studies for indoor thermal environments. International Communications in Heat and Mass Transfer. 2018;92(March):1–14.
11. *Gavrikov M.B., Pestryakova N.V.* Numerical modeling of convective heat transfer in a limited area. Moscow: IPM im. M.V.Keldysha. Preprint. 1997;28:23.
12. *Ryaben'kiy V.S., Torgashov V.A.* An Iteration-Free Approach to Solving the Navier–Stokes Equations by Implicit Finite Difference Schemes in the Vorticity-Stream Function Formulation.
13. Matem. Modelirovaniye. 1996;8(10):100-112.
14. *Ryaben'kii V.S., Torgashov V.A.* An Iteration-Free Approach to Solving the Navier–Stokes Equations by Implicit Finite Difference Schemes in the Vorticity-Stream Function Formulation. Journal of Scientific Computing. Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature. 2019. https://doi.org/10.1007/s10915-019-00926-1
15. *Gerasimkov B.P., Gubareva L.B., Pestryakova N.V.* Numerical modeling of convective-diffusion processes in a cavity.M.: IPM im. M.V.Keldysha. Preprint. 1997;28:23.
16. *Gerasimkov B.P., Pestryakova N.V.* Numerical modeling of practical problems of laminar air exchange. M.: IPM im. M.V.Keldysha. Preprint. 1997;28:23.
17. *Gerasimkov B.P., Pestryakova N.V.* Моделирование турбулентных режимов вентиляции помещений. M.: IPM im. M.V.Keldysha. Preprint. 1997;28:23.
18. *Vabishchevich P.N., Makarov M.M., Popkov A.G., Chudanov V.V., Churbanov A.G.* Numerical solution of hydrodynamics problems in the variables "stream function, velocity vortex, temperature". M.: IPM im. M.V.Keldysha. Preprint. 1993;22:21.
19. *Vabishchevich P.N., Makarov M.M., Chudanov V.V., Churbanov A.G.* Numerical modeling of convective flows in the variables "stream function, velocity vortex, temperature". M.: Institut matematicheskogo modelirovaniia RAN. Preprint. 1993;28.
20. *Douglas J., Rachford H.H.* On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables. Trans. Amer. Math. Soc. 1956;82:421–439.
21. Iliev O.P., Makarov M.M., Vassilevski P.S.. Performance of Certain Iterative Methods in Solving Implicit Difference Schemes for 2-D Navier-Stokes Equations. Int. J. Numer. Methods Engng. 1992;33(7):1465-1479.
22. *Dzhonson R., Danak A.* Heat transfer in laminar flow around a rectangular cavity in the presence of liquid injection. Teploperedacha. Seriia S. 1976;98(2):84–90.

Nadejda V. Pestryakova. Doctor of Technical Sciences, PhD in Physics and Mathematics. Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. E-mail: NPestryakova@frccsc.ru