

Основы построения комбинационных схем управления на элементах мажоритарной логики для квантовых систем

Т.Г. ЧЕРНОУСОВА^{I,II}

^I Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

^{II} Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. Одной из перспективных постCMOS технологий является QCA – нанотехнология (Quantum – dot Cellular Automata nanotechnology). Создание на ее основе квантовых систем позволит вести обработку информации с высоким быстродействием и низким энергопотреблением. Как правило, проектирование таких систем производится на элементной базе мажоритарной логики. В статье произведена классификация мажоритарных функций на простые и сложные, продемонстрирована связь между ними. Доказательства выполнены по законам и правилам булевой алгебры. Исходя из предложенной классификации мажоритарные логические схемы, построенные по соответствующим им математическим моделям, можно разделить на одноуровневые и многоуровневые. Мажоритарный дешифратор DEC 2-4 иллюстрирует одноуровневую логическую схему, а DEC 3-8 – двухуровневую. Представленные математические модели DEC 2-4 и DEC 3-8 могут использоваться в разработках сложных моделей формирования управляющих сигналов квантовых систем различного назначения.

Ключевые слова: Квантовые системы, QCA – нанотехнология, простые и сложные мажоритарные функции, мажоритарная логика, математическая модель мажоритарного дешифратора.

DOI: 10.14357/20790279260211 **EDN:** GASGRD

Введение

Под квантовыми системами будем понимать системы, проектирование которых осуществляется по квантовым технологиям. Одной из таких многообещающих постCMOS – технологий является QCA – нанотехнология, с помощью которой можно существенно увеличить плотность упаковки на кристалле. При этом системы, разработанные

по QCA – нанотехнологии, позволят производить обработку информации с низким энергопотреблением и высоким быстродействием. Впервые QCA ячейка, благодаря которой стало возможным создание QCA вентилях, представлена в работах [1-3]. Под QCA вентилями будем понимать мажоритарные и инверсные элементы. Как известно, мажоритарный элемент реализует функцию большинства

[3-5]. Еще Д. Кнут в своем фундаментальном труде «Искусство программирования» отметил, что по всей вероятности наиболее важной троичной операцией является функция большинства [6-9]. На базе современной QCA ячейки в статье показана конструкция QCA мажоритарного элемента, реализующего мажоритарную функцию с тремя переменными $MAJ = M(a,b,c)$, а также рассмотрены стандартные конструкции двух видов QCA инверторов [3, 10-13]. Аппаратное обеспечение, создаваемое на основе QCA вентилях, будем называть QCA аппаратным обеспечением. QCA – нанотехнология позволяет проектировать как комбинационные цифровые схемы, так и схемы памяти [14-27].

Создание QCA аппаратного обеспечения квантовых систем неразрывно связано с построением математических моделей цифровых схем, базирующихся на мажоритарной логике, в силу этого именуемых мажоритарными. Поэтому приобретают актуальность вопросы исследования свойств мажоритарных функций, которые предложено классифицировать на простые и сложные. Даны определения простых и сложных мажоритарных функций, а также отражена взаимосвязь между ними. Показаны основные мажоритарные законы и тождества, чьи доказательства представлены в соответствии с правилами булевой алгебры. Отмечено, что мажоритарные операции возможно преобразовать в бинарные И, ИЛИ, НЕ и наоборот.

В качестве иллюстрации практического применения основ мажоритарной логики показаны математические модели мажоритарных дешифраторов. Будем говорить, что дешифратор является мажоритарным, если его математическая модель построена по законам, тождествам и правилам мажоритарной логики. Предложенные мажоритарные дешифраторы могут быть использованы в сложных моделях управления при проектировании QCA аппаратного обеспечения квантовых систем.

1. Простые мажоритарные функции и их свойства. QCA вентили

1.1. Основные законы и тождества простой мажоритарной функции

Поведение мажоритарной функции $MAJ = M(a,b,c)$ можно описать модифицированной таблицей истинности табл.1, в соответствии с которой переменные a,b,c принимают значения из множества $\{0,1,X\}$, где X означает безразличие ($X \in \{0,1\}$). Как следует из табл.1, минимальная дизъюнктивная нормальная форма (МДНФ) $M(a,b,c)$

имеет следующий вид [10-13]:

$$MAJ = M(a,b,c) = ab \vee bc \vee ac. \quad (1)$$

Мажоритарная функция $MAJ = M(a,b,c)$, МДНФ которой имеет вид (1), является простой.

Логическая схема Maj , реализующая простую мажоритарную функцию $M(a,b,c)$ (1), показана на рис. 1, а ее условно – графическое обозначение (УГО) – на рис. 2. Как видно из рис. 1, логическая схема Maj состоит из трех элементов И, объединенных по ИЛИ.

Рассмотрим основные законы простой мажоритарной функции $MAJ = M(a,b,c)$. Одним из главных ее законов является переместительный, известный также как коммутативный [28, 29]:

$$\begin{aligned} M(a,b,c) &= M(a,c,b) = M(b,a,c) = M(b,c,a) = \\ &= M(c,a,b) = M(c,b,a) \end{aligned} \quad (2)$$

Табл. 1

Модифицированная таблица истинности мажоритарной функции $MAJ = M(a,b,c)$ ($\{a,b,c\} \in \{0,1,X\}$)

a	b	c	$MAJ = M(a,b,c)$
X	0	0	0
0	X	0	0
0	0	X	0
X	1	1	1
1	X	1	1
1	1	X	1

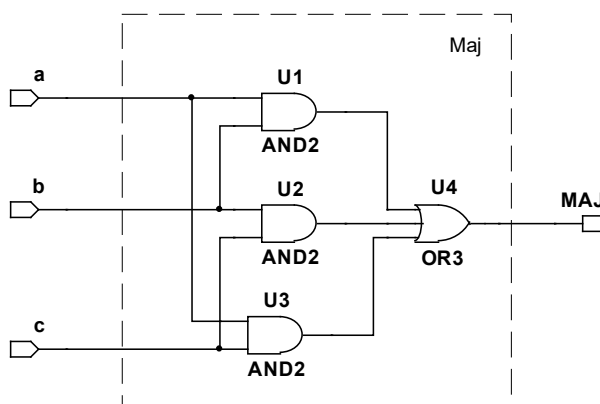


Рис. 1. Логическая схема Maj , функционирующая согласно (1)

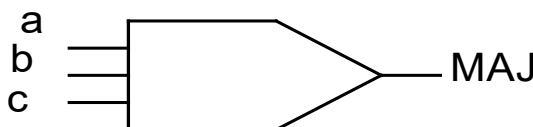


Рис. 2. УГО мажоритарного элемента, функционирующего в соответствии с логической схемой Maj и (1)

Коммутативный мажоритарный закон следует из законов булевой алгебры. Согласно (2) поря-

Табл. 2

Преобразования простой мажоритарной функции
М (а, b, с) в дизъюнкцию и конъюнкцию

№	Простая мажоритарная функция	Логическая операция ИЛИ	№	Простая мажоритарная функция	Логическая операция И
1	$M(1,b,c)$	$b \vee c$	4	$M(0,b,c)$	bc
2	$M(a,1,c)$	$a \vee c$	5	$M(a,0,c)$	ac
3	$M(a,b,1)$	$a \vee b$	6	$M(a,b,0)$	ab

док следования переменных a, b, c простой мажоритарной функции $M(a, b, c)$ не влияет на ее конечный результат. Число функций (2) определяется по формуле $n!$, где $n!$ – количество переменных обсуждаемой простой мажоритарной функции. В данном случае $n! = 3! = 6$.

Простая мажоритарная функция $M(a, b, c)$ может быть преобразована в дизъюнкцию или конъюнкцию. Если одна из переменных $M(a, b, c)$ равна единице, то (1) преобразуется в дизъюнкцию. Если одна из переменных $M(a, b, c)$ равна нулю, то (1) преобразуется в конъюнкцию. Результаты преобразований представлены в табл. 2.

Если любые две переменные простой мажоритарной функции $M(a, b, c)$ или все три переменные равны нулю, то сама функция также равна нулю:

$$\begin{aligned} M(a, 0, 0) &= M(0, b, 0) = \\ &= M(0, 0, c) = M(0, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Покажем, что выполнение $M(a, a, c)$, $M(a, a, \bar{c})$, $M(a, c, c)$ есть а:

$$\begin{aligned} M(a, a, c) &= \\ &= aa \vee ac \vee ac = a; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M(a, a, \bar{c}) &= \\ &= aa \vee a\bar{c} \vee a\bar{c} = a; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M(a, c, \bar{c}) &= \\ &= ac \vee a\bar{c} \vee c\bar{c} = \\ &= a(c \vee \bar{c}) = a. \end{aligned} \quad (5)$$

Ввиду (3) – (5), запишем:

$$\begin{aligned} M(a, a, a) &= M(a, a, \bar{a}) = \\ M(a, a, c) &= M(a, a, \bar{c}) = \\ &= M(a, c, \bar{c}) = a. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично можно доказать:

$$\begin{aligned} M(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}) &= M(\bar{a}, \bar{a}, a) = \\ &= M(\bar{a}, \bar{a}, c) = M(\bar{a}, \bar{a}, \bar{c}) = \\ &= M(\bar{a}, c, \bar{c}) = \bar{a}. \end{aligned} \quad (7)$$

На основании (6), (7) отметим:

$$\begin{aligned} M(a, b, a) &= M(a, \bar{b}, a) = \\ &= M(a, b, \bar{b}) = a; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} M(\bar{a}, b, \bar{a}) &= M(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}) = \\ &= M(\bar{a}, b, \bar{b}) = \bar{a}. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом (3) – (9) находятся b, c и их инверсные значения $\bar{b}, \bar{c}$:

$$\begin{aligned} M(b, b, b) &= M(b, b, \bar{b}) = \\ &= M(a, b, b) = M(\bar{a}, b, b) = \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= M(b, b, c) = M(b, b, \bar{c}) = b; \\ M(a, b, \bar{a}) &= M(c, b, \bar{c}) = b; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M(c, c, c) &= M(c, c, \bar{c}) = \\ &= M(a, c, c) = M(\bar{a}, c, c) = \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= M(b, c, c) = M(\bar{b}, c, c) = c; \\ M(a, c, \bar{a}) &= M(b, c, \bar{b}) = c; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M(\bar{b}, \bar{b}, \bar{b}) &= M(\bar{b}, \bar{b}, b) = \\ &= M(a, \bar{b}, \bar{b}) = M(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}) = \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= M(\bar{b}, \bar{b}, c) = M(\bar{b}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{b}; \\ M(a, \bar{b}, \bar{a}) &= M(c, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{b}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} M(\bar{c}, \bar{c}, \bar{c}) &= M(c, \bar{c}, \bar{c}) = \\ &= M(a, \bar{c}, \bar{c}) = M(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}) = \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &= M(b, \bar{c}, \bar{c}) = M(\bar{b}, \bar{c}, \bar{c}) = \bar{c}; \\ M(a, \bar{a}, \bar{c}) &= M(b, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{c}. \end{aligned} \quad (17)$$

Без доказательства примем закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{M(a, b, c)}} = M(a, b, c). \quad (18)$$

Рассмотрим выполнение закона распространения инверсии [4, 14, 28-30]:

$$\begin{aligned} \overline{M(a, b, c)} &= (\overline{ab})(\overline{bc})(\overline{ac}) = \\ &= (\bar{a} \vee \bar{b})(\bar{b} \vee \bar{c})(\bar{a} \vee \bar{c}) = \\ &= (\bar{b} \vee \bar{a} \bar{c})(\bar{a} \vee \bar{c}) = \\ &= \bar{a} \bar{b} \vee \bar{b} \bar{c} \vee \bar{a} \bar{c}. \end{aligned} \quad (19)$$

Выполнение (19) указывает на равносильность $M(a,b,c)$ и $M(a,b,\bar{c})$:

$$\overline{M(a,b,c)} = M(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}). \quad (20)$$

Таким образом, (2), (6) – (18), (20) вместе с преобразованиями, показанными в табл. 2, определяют существенные законы и тождества простой мажоритарной функции $MAJ = M(a,b,c)$.

1.2. Конструктивные особенности элементной базы QCA – нанотехнологии

QCA вентили строятся на основе ячейки, имеющей четыре квантовые точки [1-3]. Геометрически эти квантовые точки образуют квадрат. Если в такую ячейку поместить два электрона, то они незамедлительно начнут стремиться отойти как можно дальше друг от друга ввиду взаимного электростатического отталкивания. Вместе с тем туннелирование электронов к квантовым точкам позволит им занять эти точки. Состояние QCA ячейки называют поляризацией и обозначают через P . Поляризация P принимает два значения: -1 либо $+1$. Значение $P=-1$ соответствует бинарному логическому «0», а $P=+1$ – бинарной логической «1». На рис. 3 продемонстрированы два возможных состояния QCA ячейки.

На базе рассмотренной ячейки разработаны бинарная QCA линия, два вида QCA инверторов, а также QCA мажоритарный элемент, имеющий входы a , b и c , а также выход MAJ согласно (1) [3, 11, 12, 16, 17, 27]. На рис. 4 показана передача бинарной логической «1» по QCA линии, состоящей из шести ячеек. Вход рассматриваемой QCA линии обозначается через In , а выход – через Out .

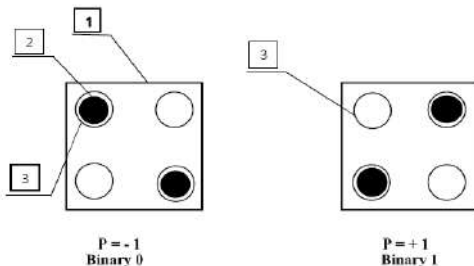


Рис. 3. Поляризация QCA ячейки: 1- QCA ячейка; 2 – электрон; 3 – квантовая точка

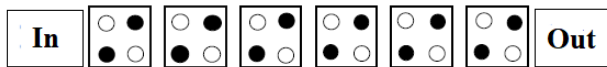


Рис. 4. Передача бинарной логической «1» по QCA линии, состоящей из шести ячеек

На рис. 5 представлена стандартная реализация QCA инвертора, на вход In которого поступает бинарный логический «0», а выход Out передает бинарную логическую «1» согласно таблице ис-

тинности функционирования инвертора. Изображенный QCA инвертор по своей конструкции является двухветвевым (dual – branch inverter), обеспечивая тем самым надежное инвертирование информации.

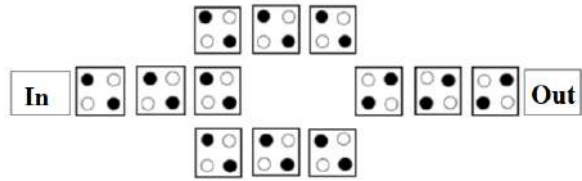


Рис. 5. Стандартный двухветвевой QCA инвертор

На рис. 6 показан альтернативный вариант реализации QCA инвертора, на вход In которого также поступает бинарный логический «0», а выход Out передает бинарную логическую «1». Второй вариант реализации QCA инвертора по своей конструкции является одноветвевым (single – branch inverter), что безусловно снижает надежность инвертора, но делает его более компактным. Одноветвевое исполнение инвертора применяется в том случае, если при использовании QCA нанотехнологии разрабатываемая логическая схема имеет малую степень чувствительности к шумам.

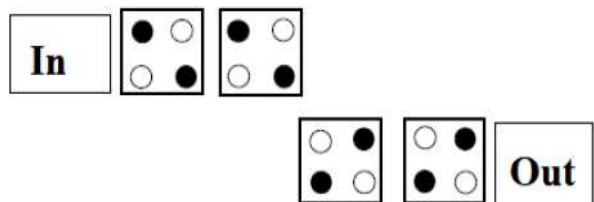


Рис. 6. Одноветвевой QCA инвертор

На рис. 7 проиллюстрирована конструкция QCA мажоритарного элемента, на входы a и b которого подается бинарная логическая «1», а на вход c – бинарный логический «0» [3, 16, 27, 31]. Выход MAJ рассматриваемого QCA мажоритарного элемента передает бинарную логическую «1», что соответствует табл. 1, а также логической схеме MAJ , изображенной на рис. 1. Кроме трех входных и одной выходной ячеек, конструкция QCA мажоритарного элемента содержит вдобавок оценочную ячейку (evaluation cell), которая поляризуется так, как и любые две ее входные ячейки. В обсуждаемом случае оценочная ячейка имеет поляризацию $P=+1$.

Создание QCA аппаратного обеспечения для квантовой системы можно разбить на две стадии. К первой стадии относится логическое проектирование системы на мажоритарной логике [32]. Непосредственной частью этой стадии является построение математических моделей мажоритарных схем.

Вторая стадия связана с непосредственной реализацией разработанного проекта на логическом уровне по стандартам QCA нанотехнологии.

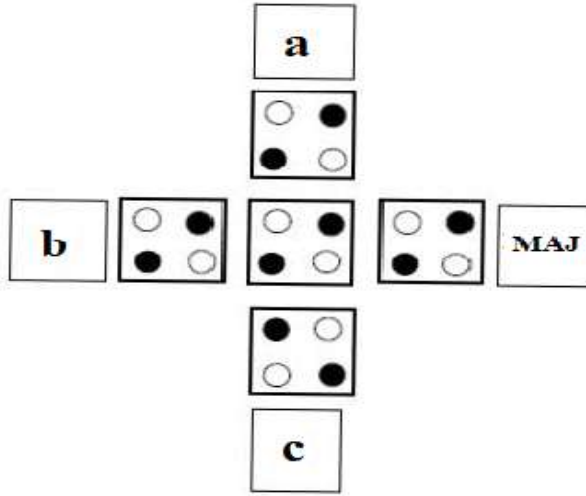


Рис. 7. QCA мажоритарный элемент

2. Сложные мажоритарные функции и их свойства

При замене переменных простой мажоритарной функции другими простыми функциями получим уже сложную. Например, $M(a, b, M(d, e, f))$ является сложной мажоритарной функцией.

Учитывая (20), выполнение закона распространения инверсии для сложной мажоритарной функции $M(a, b, M(d, e, f))$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{M(a, b, M(d, e, f))} &= \\ &= \overline{ab} \vee \overline{aM(d, e, f)} \vee \\ &\vee \overline{bM(d, e, f)} = \overline{ab} \vee \\ &\vee \overline{aM(d, e, f)} \vee \overline{bM(d, e, f)} = \\ &= M(\overline{a}, \overline{b}, M(\overline{d}, \overline{e}, \overline{f})). \end{aligned} \quad (21)$$

Если вместо переменных простой функции $M(a, b, c)$ подставить соответственно $M(d, e, f)$, $M(g, h, k)$ и $M(l, m, r)$, то, принимая во внимание (21), закон распространения инверсии для такой сложной функции примет вид:

$$\begin{aligned} \overline{M(M(d, e, f), M(g, h, k), \\ M(l, m, r))} &= M(\overline{M(d, e, f)}, \overline{M(g, h, k)}, \\ &M(\overline{l}, \overline{m}, \overline{r})). \end{aligned} \quad (22)$$

Докажем, что

$$\begin{aligned} M(a, b, M(d, e, b)) &= \\ &= M(d, b, (a, e, b)). \end{aligned} \quad (23)$$

Для доказательства (23) воспользуемся (1):

$$\begin{aligned} M(a, b, M(d, e, b)) &= \\ &= ab \vee a(de \vee db \vee eb) \vee \\ &\vee b(de \vee db \vee eb) = \\ &= db \vee d(ae) \vee d(ab) \vee \\ &\vee d(eb) \vee b(ae) \vee \\ &\vee b(ab) \vee b(eb) = \\ &= db \vee d(ae \vee ab \vee ae) \vee \\ &\vee b(ae \vee ab \vee ae) = \\ &= M(d, b, M(a, e, b)). \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично доказательству (24) находится следующее тождество:

$$\begin{aligned} M(a, b, M(d, e, b)) &= \\ &= M(e, b, M(d, a, b)). \end{aligned} \quad (25)$$

Выполнение (23), (25) отвечает мажоритарному ассоциативному закону [4, 14, 28–30, 33–36].

Рассмотрим тождество:

$$\begin{aligned} M(\overline{a}, b, M(a, e, f)) &= \\ &= M(f, b, M(\overline{a}, e, b)). \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство (26) базируется на (1), законах и правилах бинарной логики:

$$\begin{aligned} M(\overline{a}, b, M(a, e, f)) &= \\ &= \overline{ab} \vee \overline{a(ae \vee af \vee ef)} \vee \\ &\vee b(ae \vee af \vee ef) = \\ &= \overline{ab}(1 \vee f) \vee f(\overline{ae}) \vee \\ &\vee (be)a \vee (fb)a \vee f(be) = \\ &= \overline{ab} \vee f(\overline{ab}) \vee (fb)\overline{a} \vee \\ &\vee f(\overline{ae}) \vee f(be) \vee (be)a \vee \\ &\vee (fb)a = \overline{ab}(1 \vee e) \vee \\ &\vee f(\overline{ab} \vee \overline{ae} \vee be) \vee \\ &\vee fb(\overline{a} \vee a) \vee (be)a = \\ &= b(\overline{ab}) \vee b(\overline{ae}) \vee (be)\overline{a} \vee \\ &\vee f(\overline{ab} \vee \overline{ae} \vee be) \vee fb \vee \\ &\vee (be)a = fb \vee f(\overline{ab} \vee \\ &\vee \overline{ae} \vee be) \vee b(\overline{ab}) \vee \\ &\vee b(\overline{ae}) \vee be(\overline{a} \vee a) = fb \vee \\ &\vee f(\overline{ab} \vee \overline{ae} \vee be) \vee \\ &\vee b(\overline{ab} \vee \overline{ae} \vee be) = \\ &= M(f, b, M(\overline{a}, e, b)). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким же образом, как приведенное доказательство (27), доказывается тождество:

$$\begin{aligned} M(\bar{a}, b, M(a, e, f)) &= \\ &= M(e, b, M(\bar{a}, b, f)). \end{aligned} \quad (28)$$

— Кроме того, сложная мажоритарная функция $M(\bar{a}, b, M(a, e, f))$ равносильна функции $M(\bar{a}, b, M(b, e, f))$:

$$\begin{aligned} M(\bar{a}, b, M(a, e, f)) &= \\ &= M(\bar{a}, b, M(b, e, f)). \end{aligned} \quad (29)$$

Докажем (29):

$$\begin{aligned} M(\bar{a}, b, M(a, e, f)) &= \\ &= \bar{a}b(1 \vee e) \vee \bar{a}(ef) \vee \\ &\vee a(be) \vee a(bf) \vee b(ef) = \\ &= \bar{a}b \vee \bar{a}(be) \vee \bar{a}(ef) \vee \\ &\vee a(be) \vee a(bf) \vee b(ef) = \\ &= \bar{a}b(1 \vee f) \vee \bar{a}(be) \vee \\ &\vee \bar{a}(ef) \vee be(\bar{a} \vee a) \vee \\ &\vee a(bf) \vee b(ef) = \\ &= \bar{a}b \vee \bar{a}(be) \vee \bar{a}(bf) \vee \\ &\vee \bar{a}(ef) \vee b(be) \vee \\ &\vee b(bf)(\bar{a} \vee a) \vee b(ef) = \\ &= \bar{a}b \vee \bar{a}(be \vee bf \vee ef) \vee \\ &\vee b(be) = \bar{a}b \vee \\ &\vee \bar{a}(be \vee bf \vee ef) \vee \\ &\vee b(be \vee bf \vee ef) = \\ &= M(\bar{a}, b, M(b, e, f)). \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно доказательствам (27), (30) соответствующих им тождеств (26) и (29), а также опираясь на (28), можно записать:

$$\begin{aligned} M(\bar{a}, b, M(a, e, f)) &= \\ &= M(f, b, M(\bar{a}, e, b)) = \\ &= M(\bar{a}, b, M(b, e, f)) = \\ &= M(e, b, M(\bar{a}, b, f)). \end{aligned} \quad (31)$$

Сложная мажоритарная функция $M(\bar{b}, M(a, b, e), M(a, b, f))$, включающая две простые $M(\bar{a}, b, e)$ и $M(a, b, f)$, есть сложная функция $M(a, b, M(\bar{b}, e, f))$, включающая одну простую $M(\bar{b}, e, f)$:

$$\begin{aligned} M(\bar{b}, M(a, b, e), M(a, b, f)) &= \\ &= M(a, b, M(\bar{b}, e, f)). \end{aligned} \quad (32)$$

Докажем (32):

$$\begin{aligned} M(\bar{b}, M(a, b, e), M(a, b, f)) &= \\ &= \bar{b}(ab \vee ae \vee be) \vee \bar{b}(ab \vee \\ &\vee af \vee bf) \vee (ab \vee ae \vee \\ &\vee be)(ab \vee af \vee bf) = \\ &= a(\bar{b}e) \vee a(\bar{b}f) \vee a(ef) \vee \\ &\vee ab \vee (ab)f \vee (ab)e \vee \\ &\vee (ab)ef \vee b(ef) = a(\bar{b}e \vee \\ &\vee \bar{b}f \vee ef) \vee ab(1 \vee f \vee \\ &e \vee ef) \vee b(ef) = ab \vee \\ &\vee a(\bar{b}e \vee \bar{b}f \vee ef) \vee \\ &\vee b(\bar{b}e) \vee b(\bar{b}f) \vee b(ef) = \\ &= ab \vee a(\bar{b}e \vee \bar{b}f \vee ef) \vee \\ &\vee b(\bar{b}e \vee \bar{b}f \vee ef) = \\ &= M(a, b, M(\bar{b}, e, f)). \end{aligned}$$

Сложная мажоритарная функция $M(f, M(a, b, d), M(a, b, e))$, включающая две простые $M(a, b, d)$ и $M(a, b, e)$, может быть представлена сложной функцией $M(a, b, M(d, e, f))$, которая имеет только одну простую $M(d, e, f)$:

$$\begin{aligned} M(f, M(a, b, d), M(a, b, e)) &= \\ &= M(a, b, M(d, e, f)). \end{aligned} \quad (33)$$

Покажем доказательство (33):

$$\begin{aligned} M(f, M(a, b, d), M(a, b, e)) &= \\ &= f(ab \vee ad \vee bd) \vee f(ab \vee \\ &\vee ae \vee be) \vee (ab \vee ad \vee bd)(ab \vee \\ &\vee ae \vee be) = f(ab) \vee a(df) \vee \\ &\vee b(df) \vee a(fe) \vee b(fe) \vee ab \vee \\ &\vee (ab)e \vee (ab)d \vee a(de) \vee \\ &\vee (ab)de \vee (ab)d \vee b(de) = \\ &= a(de \vee df \vee ef) \vee b(de \vee \\ &\vee df \vee ef) \vee ab(1 \vee f \vee e \vee \\ &\vee d \vee de) = a(de \vee df \vee ef) \vee \\ &\vee b(de \vee df \vee ef) \vee ab = \\ &= M(a, b, M(d, e, f)). \end{aligned}$$

Выполнение (32), (33) называют законом мажоритарной дистрибутивности или мажоритарным распределительным законом [4, 14, 28-30, 33-36].

Сложная мажоритарная функция $M(f, M(\bar{a}, b, e), M(a, b, e))$, включающая две простые $M(\bar{a}, b, e)$ и $M(a, b, e)$, есть сложная функция $M(b, M(\bar{a}, e, f))$,

$M(\bar{a}, \bar{e}, f)$, в состав которой входят две простые $M(a, e, f)$ и $M(a, \bar{e}, f)$:

$$\begin{aligned} M(f, M(\bar{a}, b, \bar{e}), M(a, b, e)) &= \\ &= M(b, M(\bar{a}, e, f), M(a, \bar{e}, f)). \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим доказательство (34):

$$\begin{aligned} M(f, M(\bar{a}, b, \bar{e}), M(a, b, e)) &= \\ &= f(\bar{a}b \vee \bar{a}\bar{e} \vee b\bar{e}) \vee f(ab \vee ae \vee \\ &\vee be) \vee (\bar{a}b \vee \bar{a}\bar{e} \vee b\bar{e})(ab \vee ae \vee \\ &\vee be) = b(\bar{e}f) \vee b(\bar{a}f) \vee \bar{a}\bar{e}f \vee \\ &\vee b(af) \vee b(ef) \vee aef \vee b(\bar{a}e) \vee \\ &\vee b(\bar{a}e) = b(\bar{a}e \vee \bar{a}f \vee ef) \vee \\ &\vee b(\bar{a}e \vee af \vee \bar{e}f) \vee (\bar{a}e \vee \bar{a}f \vee \\ &\vee ef)(\bar{a}e \vee af \vee \bar{e}f) = \\ &= M(b, M(\bar{a}, e, f), M(a, \bar{e}, f)). \end{aligned}$$

Как видим, тождества (21)–(23), (25), (26), (28), (29), (31)–(34) отражают базовые свойства сложной мажоритарной функции.

3. Взаимосвязь между простыми и сложными мажоритарными функциями

Сложная мажоритарная функция $M(a, b, M(\bar{a}, \bar{b}, f))$ есть простая функция $M(a, b, f)$ [33, 35, 36]:

$$\begin{aligned} M(a, b, M(\bar{a}, \bar{b}, f)) &= \\ &= M(a, b, f). \end{aligned} \quad (35)$$

Приведем доказательство (35):

$$\begin{aligned} M(a, b, M(\bar{a}, \bar{b}, f)) &= ab \vee \\ &\vee a(\bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}f \vee \bar{b}f) \vee b(\bar{a}\bar{b} \vee \\ &\vee \bar{a}f \vee \bar{b}f) = ab(1 \vee f) \vee \\ &\vee \bar{b}(af) \vee \bar{a}(bf) = ab \vee \\ &\vee af(b \vee \bar{b}) \vee \bar{a}(bf) = \\ &= ab(1 \vee f) \vee af \vee \bar{a}(bf) = \\ &= ab \vee af \vee bf(a \vee \bar{a}) = \\ &= ab \vee af \vee bf = M(a, b, f). \end{aligned} \quad (36)$$

В свою очередь, сложная мажоритарная функция $M(\bar{a}, \bar{b}, M(a, b, f))$ есть простая функция $M(\bar{a}, \bar{b}, f)$:

$$\begin{aligned} M(\bar{a}, \bar{b}, M(a, b, f)) &= \\ &= M(\bar{a}, \bar{b}, f). \end{aligned} \quad (37)$$

Доказательство (37) аналогично доказательству (36) тождества (35):

$$\begin{aligned} M(\bar{a}, \bar{b}, M(a, b, f)) &= \bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}(ab \vee \\ &\vee af \vee bf) \vee \bar{b}(ab \vee af \vee bf) = \\ &= \bar{a}\bar{b}(1 \vee f) \vee \bar{b}(\bar{a}f) \vee \bar{a}(\bar{b}f) = \\ &= \bar{a}\bar{b}(1 \vee f) \vee \bar{a}f(b \vee \bar{b}) \vee \bar{a}(\bar{b}f) = \\ &= \bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}f \vee \bar{b}f(a \vee \bar{a}) = \\ &= \bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}f \vee \bar{b}f = M(\bar{a}, \bar{b}, f). \end{aligned}$$

Сложная мажоритарная функция $M(a, M(a, e, f), M(\bar{a}, e, b))$ включающая две простые $M(a, e, f)$ и $M(\bar{a}, e, b)$ есть простая функция $M(a, e, b)$:

$$\begin{aligned} M(a, M(a, e, f), M(\bar{a}, e, b)) &= \\ &= M(a, e, f). \end{aligned} \quad (38)$$

Выполнение (38) называют правилом поглощения [14, 28–30, 33–36]. Представим его доказательство:

$$\begin{aligned} M(a, M(a, e, f), M(\bar{a}, e, b)) &= \\ &= a(ae \vee af \vee ef) \vee a(\bar{a}e \vee \bar{a}b \vee \\ &\vee eb) \vee (ae \vee af \vee ef)(\bar{a}e \vee \bar{a}b \vee \\ &\vee eb) = a(ae) \vee a(af) \vee a(ef) \vee \\ &\vee aeb \vee aeb \vee ab(ef) \vee \bar{a}(ef) \vee \\ &\vee \bar{a}ebf \vee ebf = ae \vee af \vee \\ &\vee a(ef)(1 \vee b) \vee \bar{a}(ef) \vee \\ &\vee b(ae) \vee b(ef)(\bar{a} \vee 1) = ae(b \vee \\ &\vee 1) \vee af \vee ef(a \vee \bar{a} \vee b) = ae \vee \\ &\vee af \vee ef = M(a, e, f). \end{aligned}$$

В результате тождества (35), (37), (38) устанавливают связь между простыми и сложными мажоритарными функциями.

4. Построение математических моделей мажоритарных дешифраторов

Основные законы и тождества мажоритарной логики (1), (2), (6)–(18), (20)–(23), (25), (26), (28), (29), (31)–(35), (37), (38) позволяют строить математические модели мажоритарных логических схем, которые предназначены для выполнения как вычислительных и управляющих операций, так и хранения информации [10–26]. Нередко в логическом проектировании цифровых систем, включая квантовые, формирование управляющих сигналов осуществляют с помощью дешифраторов. Покажем математическую модель мажоритарного дешифратора DEC 2-4, созданную посредством преобразований, представленных в табл. 2:

$$M(\bar{A}, \bar{B}, 0) = \bar{A}\bar{B} = Y0'; \quad (39)$$

$$M(\bar{A}, B, 0) = \bar{A}B = Y1'; \quad (40)$$

$$M(A, \bar{B}, 0) = A\bar{B} = Y2'; \quad (41)$$

$$M(A, B, 0) = AB = Y3'. \quad (42)$$

Поскольку (39)-(42) есть простые мажоритарные функции, то логическая схема, реализующая их, окажется одноуровневой. Помимо (39)-(42), поведение мажоритарного DEC 2-4 может быть описано также посредством табл.3, в строках которой размещены $M(\bar{A}, \bar{B}, 0)$, $M(\bar{A}, B, 0)$, $M(A, \bar{B}, 0)$ и $M(A, B, 0)$, а в столбцах – $Y0'$ – $Y3'$. На пересечении любых строк и столбцов табл.3 ставится «1», если имеет место выполнение (39)-(42), в противном случае – «0».

На рис. 8, а) продемонстрирована одноуровневая логическая схема мажоритарного DEC 2-4, разработанная в соответствии с (39)-(42) и табл.3. Ее входами являются А и В, а выходами – $Y0'$ – $Y3'$. Отметим, что данная логическая схема содержит шесть QCA вентилях: четыре 3-хходовых мажоритарных элемента и два инвертора. Любой мажоритарный элемент рассматриваемой логической схемы соответствует 2-хходовой конъюнкции при условии реализации DEC 2-4 в базисе И, НЕ. На рис. 8, б) представлена одноуровневая логическая схема DEC 2-4 на конъюнктивных и инверсных элементах бинарной логики, равносильная ранее описанной логической схеме мажоритарного DEC 2-4. Приведенная схема содержит четыре 2-хходовых конъюнктивных элемента и два инвертора.

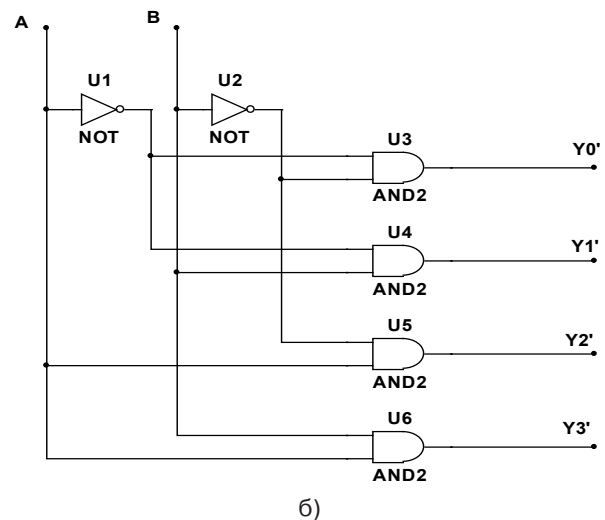
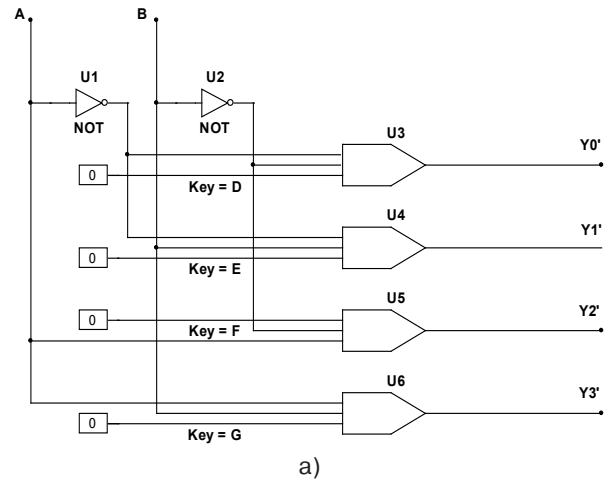


Табл.3

Описание поведения мажоритарного дешифратора DEC 2-4 по математической модели (39)-(42)

Простая мажоритарная функция	Выходы			
	$Y0'$	$Y1'$	$Y2'$	$Y3'$
$M(\bar{A}, \bar{B}, 0)$	1	0	0	0
$M(\bar{A}, B, 0)$	0	1	0	0
$M(A, \bar{B}, 0)$	0	0	1	0
$M(A, B, 0)$	0	0	0	1

Сравнение различных проектов реализации мажоритарных DEC 2-4 по QCA нанотехнологии можно произвести с помощью табл.4. Современные разработки DEC 2-4 имеют значительно меньшее количество QCA ячеек в сравнении с ранними. Так, в работе [40] предложен проект DEC 2-4 с числом QCA ячеек, составляющих всего 21.38% - 30.9% от количества QCA ячеек тех проектов, которые описаны в работе [37]. Другой отличительной чертой оригинальных разработок мажоритарных DEC 2-4 является их многослойность, обеспечи-

Рис. 8. Одноуровневые логические схемы дешифраторов DEC 2-4: а) мажоритарный DEC 2-4, построенный на 3-хходовых мажоритарных элементах; б) DEC 2-4, построенный на элементах бинарной логики И, НЕ

вающая увеличение плотности компоновки QCA ячеек, а также уменьшение занимаемой площади [38, 40]. В частности, 3-хслойный мажоритарный DEC 2-4, представленный в работе [40], занимает $0.01 \mu m^2$.

Покажем математическую модель мажоритарного DEC 3-8, построенную на основе (39)-(42):

$$M(0, M(\bar{A}, \bar{B}, 0), \bar{C}) = M(0, Y0', \bar{C}) = \bar{A} \bar{B} \bar{C} = Y0; \quad (43)$$

$$M(0, M(\bar{A}, B, 0), C) = M(0, Y1', C) = \bar{A} B C = Y1; \quad (44)$$

$$M(0, M(A, \bar{B}, 0), \bar{C}) = M(0, Y2', \bar{C}) = A \bar{B} \bar{C} = Y2; \quad (45)$$

Табл. 4

Сравнительная характеристика реализации проектов DEC 2-4 по QCA нанотехнологии

Проект	Число ячеек	Занимаемая площадь кристалла μm^2	Число слоев топологии
Проект 1 [37]	110	0.13	1
Проект 2 [37]	159	0.19	1
Проект [18]	93	0.09	1
Проект [38]	88	0.06	3
Проект [39]	50	0.01	1
Проект [40]	34	0.02	1
Проект [40]	34	0.01	3

$$\begin{aligned} M(0, M(\bar{A}, B, 0), C) = \\ = M(0, Y1', C) = \bar{A}BC = Y3; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} M(0, M(A, \bar{B}, 0), \bar{C}) = \\ = M(0, Y2', \bar{C}) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} = Y4; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} M(0, M(A, \bar{B}, 0), C) = \\ = M(0, Y2', C) = \bar{A}\bar{B}C = Y5; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} M(0, M(A, B, 0), \bar{C}) = \\ = M(0, Y3', \bar{C}) = \bar{A}B\bar{C} = Y6; \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} M(0, M(A, B, 0), C) = \\ = M(0, Y3', C) = ABC = Y7. \end{aligned} \quad (50)$$

Как видно, (43)-(50) представляют собой сложные мажоритарные функции, притом любая из них содержит одну простую, соответствующую описанию математической модели DEC 2-4 (39)-(42). Простые функции $Y0'-Y3'$ являются внутренними по отношению к внешним $Y0-Y7$. Взаимосвязь между ними отражена в табл. 5 размером $I \times J = 4 \times 8 (i = 0, \bar{I} = 0, 3; j = 0, \bar{J} = 0, 7)$. $Y0'-Y3'$ содержатся в строках этой таблицы, а $Y0-Y7$ – в ее столбцах. На пересечении i -й строки и j -го столбца табл. 5 ставится «1», если простая внутренняя функция включена в соответствующую ей сложную согласно (43)-(50), в противном случае – «0». Так, например, на пересечении $M(\bar{A}, B, 0)$ и $Y0$, а также $M(\bar{A}, B, 0)$ и $Y1$ ставится «1», поскольку простая внутренняя функция $M(\bar{A}, B, 0)$ включена во внешние сложные $Y0, Y1$ исходя из (43) и (44). Число «1» любой строки табл. 5 назовем рангом

этой строки. Ранги всех строк рассматриваемой таблицы одинаковы и равны двум: $\text{rank}_i = 2$. Тогда сумма рангов строк табл.5 равна восьми:

$$\text{RANKI} = \sum_{i=0}^{I=3} \text{rank}_i = 8. \quad (51)$$

Число «1» любого столбца табл.5 назовем рангом этого столбца. Ранги всех столбцов данной таблицы одинаковы и равны единице: $\text{rank}_j = 1$. Тогда сумма рангов столбцов табл. 5 равна восьми:

$$\text{RANKJ} = \sum_{j=0}^{J=7} \text{rank}_j = 8. \quad (52)$$

В силу (51) и (52) можно записать:

$$\text{RANKI} = \text{RANKJ} = 8. \quad (53)$$

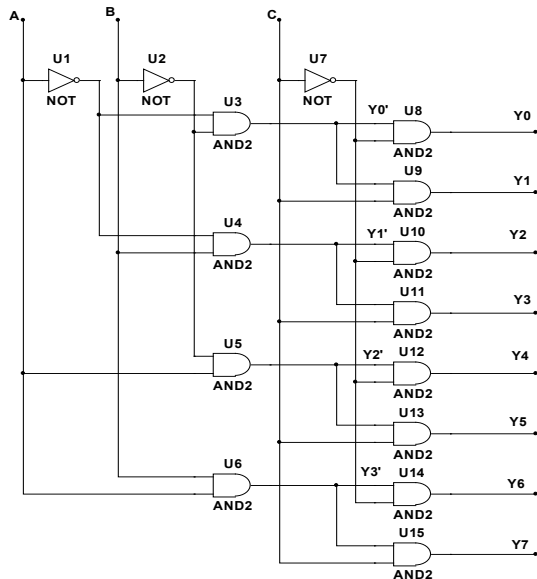
Табл. 5, для которой имеет место (53), причем $\forall \text{rank}_i = 2 (i = 0, 3)$ и $\forall \text{rank}_j = 1 (j = 0, 7)$, является базовой при построении двухуровневой логической схемы мажоритарного DEC3-8. Эту схему, построенную согласно (43)-(50) по табл. 5, также будем считать базовой. Поведение первого уровня базовой логической схемы мажоритарного DEC 3-8 описано простыми внутренними функциями $Y0'-Y3'$, а поведение второго уровня – внешними функциями $Y0-Y7$.

Двухуровневая базовая логическая схема мажоритарного DEC 3-8 показана на рис. 9, а). Ее внешними входами являются A, B и C , а выходами – $Y0-Y7$. Первый уровень рассматриваемой схемы реализован на четырех 3-хвходовых мажоритар-

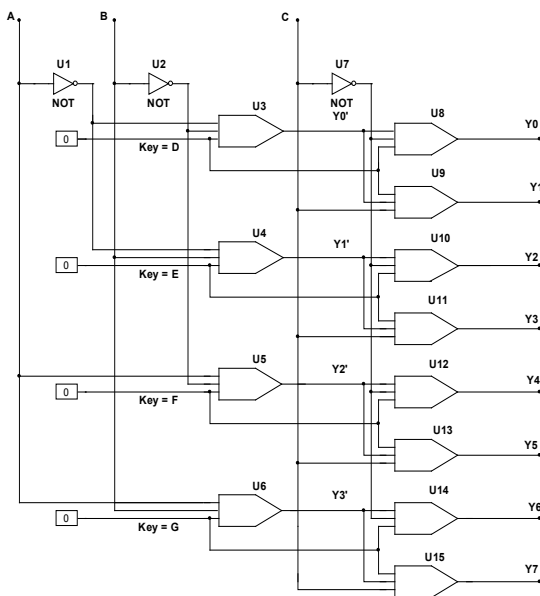
Табл. 5

Описание поведения мажоритарного дешифратора DEC 3-8 по математической модели (43)-(50)

Простые внутренние функции	Сложные внешние функции							
	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
$M(\bar{A}, \bar{B}, 0) = Y0'$	1	1	0	0	0	0	0	0
$M(\bar{A}, B, 0) = Y1'$	0	0	1	1	0	0	0	0
$M(A, \bar{B}, 0) = Y2'$	0	0	0	0	1	1	0	0
$M(A, B, 0) = Y3'$	0	0	0	0	0	0	1	1



а)



б)

Рис. 9. Двухуровневые базовые логические схемы дешифраторов DEC 3-8: а) базовая логическая схема DEC 3-8, построенная на 3-х входных мажоритарных элементах; б) базовая логическая схема DEC 3-8, построенная на элементах бинарной логики И, НЕ

ных элементах $U3-U6$, а также двух инверторов $U1$ и $U2$. Второй уровень реализован на восьми 3-х входных мажоритарных элементах $U8-U15$ и инверторе $U7$. Выходы $Y0'-Y3'$ мажоритарных элементов $U3-U6$ первого уровня поступают на

соответствующие входы мажоритарных элементов $U8-U15$ второго уровня согласно (43)-(50) и табл. 5. Таким образом, базовая логическая схема мажоритарного DEC 3-8 содержит пятнадцать QCA вентилях: двенадцать мажоритарных элементов и три инвертора.

На рис. 9, б) продемонстрирована двухуровневая базовая логическая схема DEC 3-8 в базе И, НЕ. Эта схема, равносильная выше приведенной двухуровневой базовой логической схеме мажоритарного DEC 3-8, построена на двенадцати 2-х входных элементах И, а также трех инверторах. На ее первом уровне простые внутренние функции $Y0'-Y3'$ реализованы с помощью четырех конъюнктивных элементов $U3-U6$ и двух инверторов $U1, U2$. На втором уровне рассматриваемой схемы сложные функции $Y0-Y7$ реализованы посредством восьми конъюнктивных элементов $U8-U15$ и инвертора $U7$. Взаимосвязь выходов $U3-U6$ со входами $U8-U15$ осуществлена согласно (43)-(50).

Сравнение различных проектов реализации базовой логической схемы DEC 3-8 по QCA нанотехнологии можно осуществить благодаря табл. 6. Ее анализ показывает, что в современных разработках рассматриваемых мажоритарных дешифраторов число QCA ячеек значительно меньше по сравнению с ранее предложенными проектами. В частности, в работе [18] предложен проект реализации базовой логической схемы DEC 3-8 с числом QCA ячеек, составляющих 47.92% от количества QCA ячеек проекта [41]. Однако, в работе [39] уже показан проект реализации базовой логической схемы DEC 3-8 с числом QCA ячеек, составляющих всего 25.8% от количества QCA ячеек проекта [41]. Трехслойная реализация проекта [39] позволила не только значительно уменьшить число QCA ячеек, но и уменьшить занимаемую площадь до $0.04 \mu m^2$.

Математическая модель DEC 3-8 (43)-(50) может быть модифицирована при использовании закона распространения инверсии (20), а также тождеств (31). Покажем применение (20), (31) на примере модификации $Y3$ (46) и $Y4$ (47):

$$\begin{aligned}
 M(0, M(\bar{A}, B, 0), C) &= \\
 &= \left[\begin{aligned} (31): M(e, b, M(\bar{a}, b, f)) &= \\ &= M(\bar{a}, b, M(a, e, f)); \\ b = 0 \Rightarrow M(e, 0, M(\bar{a}, 0, f)) &= \\ &= M(\bar{a}, 0, M(a, e, f)) \end{aligned} \right] = \\
 &= M(\bar{A}, 0, M(A, B, C)) = \bar{A}BC = Y3;
 \end{aligned}$$

Табл. 6

Сравнительная характеристика реализации проектов базовой логической схемы DEC 3-8 по QCA нанотехнологии

Проект	Число ячеек	Занимаемая площадь кристалла μm^2	Число слоев топологии
Проект [41]	651	0.77	1
Проект [18]	312	0.1	1
Проект [39]	168	0.04	3

$$M(0, M(A, \bar{B}, 0), \bar{C}) = |(31)| = M(A, 0, M(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})) = M(A, 0, M(\bar{A}, B, C)) = ABC = Y7. \quad (61)$$

$$\begin{aligned} &= M(A, 0, M(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})) = \\ &= \left[\begin{array}{l} (20) : \bar{M}(a, b, c) = \\ = M(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}); \\ \Rightarrow M(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = \\ = \bar{M}(A, B, C) \end{array} \right] = \\ &= M(A, 0, \bar{M}(A, B, C)) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} = Y4. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно преобразовать (43)-(45), (48)-(50). Приведем полную математическую модель DEC 3-8, полученную в результате этих преобразований:

$$\begin{aligned} &M(\bar{A}, 0, \bar{M}(A, B, C)) = \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} = Y0; \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} &M(0, \bar{M}(A, B, C), C) = \\ &= \bar{A}\bar{B}C = Y1; \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} &M(\bar{M}(A, B, C), B, 0) = \\ &= \bar{A}BC = Y2; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} &M(\bar{A}, 0, M(A, B, C)) = \\ &= \bar{A}BC = Y3; \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} &M(A, 0, \bar{M}(A, B, C)) = \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} = Y4; \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} &M(M(A, B, C), \bar{B}, 0) = \\ &= \bar{A}BC = Y5; \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} &M(0, M(A, B, C), \bar{C}) = \\ &= \bar{A}BC = Y6; \end{aligned} \quad (60)$$

Метод нахождения математических моделей цифровых устройств путем непосредственного применения законов, тождеств, правил для простых и сложных мажоритарных функций назовем методом мажоритарных преобразований. Согласно этому методу предложена одна из возможных математических моделей DEC3-8 (54)-(61). Взаимосвязь простых внутренних мажоритарных функций данной модели $\bar{M}(A, B, C)$, $M(\bar{A}, B, C)$ и их инверсий $\bar{M}(A, B, C)$, $M(\bar{A}, B, C)$ со сложными внешними $Y0$ - $Y7$ отражена в табл. 7.

Любой ранг столбца табл. 7, как и табл. 5, равен единице, а их сумма равна восьми: $\forall rank_j = 1 (j = 0, 7), RANKJ = 8$. Ранги 0-й и 3-й строк рассматриваемой табл. 7 минимальны и равны единице, а ранги 1-й и 2-й строк максимальны и равны трем, при этом их сумма соответствует сумме рангов строк табл. 5 и равна восьми: $ranki_0 = ranki_3 = 1, ranki_1 = ranki_2 = 3, RANKI = 8$. Из анализа рангов строк $ranki_i (i = 0, 3)$ табл. 5 и табл. 7 следует неравенство:

$$1 \leq ranki_i \leq 3. \quad (62)$$

Неравенство (62) показывает, что табл. 5, как ранее указано, состоит из строк только с одинаковыми рангами, равными двум ($ranki_i = 2$), а табл. 7 включает в себя строки исключительно с минимальными либо максимальными рангами. Заметим, что максимальный ранг строк табл. 7 соответствует числу переменных рассматриваемых внутренних простых и внешних мажоритарных функций, т.е. трем. Таким образом, метод мажоритарных преобразований позволил найти математическую модель

Табл. 7

Описание поведения мажоритарного дешифратора DEC 3-8 по математической модели (54)-(61)

Простые внутренние функции	Сложные внешние функции							
	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
$\bar{M}(\bar{A}, B, C)$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{M}(A, B, C)$	0	1	1	0	1	0	0	0
$M(A, B, C)$	0	0	0	1	0	1	1	0
$M(\bar{A}, B, C)$	0	0	0	0	0	0	0	1

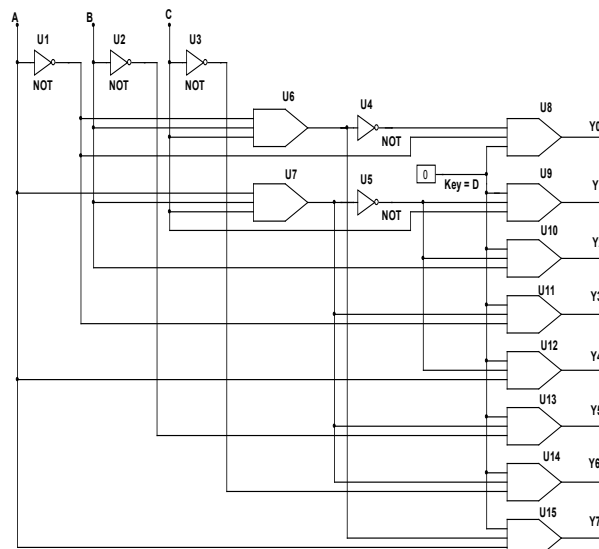
DEC 3-8 (54)-(61), в которой простая внутренняя функция $M(A, B, C)$ содержится в сложной внешней функции $Y7$, а ее инверсия $\overline{M(A, B, C)}$ – в $Y0$. Наряду с этим в предложенной модели $M(A, B, C)$ входит в состав трех сложных внешних функций $Y3$, $Y5$ и $Y6$, а $\overline{M(A, B, C)}$ – в состав $Y1$, $Y2$ и $Y4$.

Двухуровневая логическая схема мажоритарного дешифратора DEC 3-8, построенная по математической модели (54)-(61) и табл. 7, представлена на рис. 10, а). В отличие от базовой данная схема содержит пять инверторов $U1-U5$ и всего десять мажоритарных элементов $U6-U15$. Первый ее уровень реализован на инверторах $U1-U5$ и двух мажоритарных элементах $U6$, $U7$. Внешние входы A, B, C подключены к $U1-U3$. Выходы первого уровня рассматриваемой схемы поступают на соответствующие входы мажоритарных элементов второго уровня $U8-U15$, формирующих внешние выходы $Y0-Y7$. Равносильная данной схеме двухуровневая логическая схема DEC 3-8 в базисе И, ИЛИ, НЕ продемонстрирована на рис.10, б). Эта схема содержит пять инверторов, тринадцать элементов И, а также два элемента ИЛИ. На первом ее уровне реализация одного мажоритарного элемента произведена на $U3-U5$ и $U7$, тогда как реализация другого мажоритарного элемента выполнена на $U9, U12$, а также $U13$. Выходы $U6, U7, U13, U14$ поступают на соответствующие входы элементов И второго уровня $U8$ и $U15-U21$, которые определяют $Y0-Y7$ при переводе (54)-(61) в бинарную логику И, ИЛИ, НЕ.

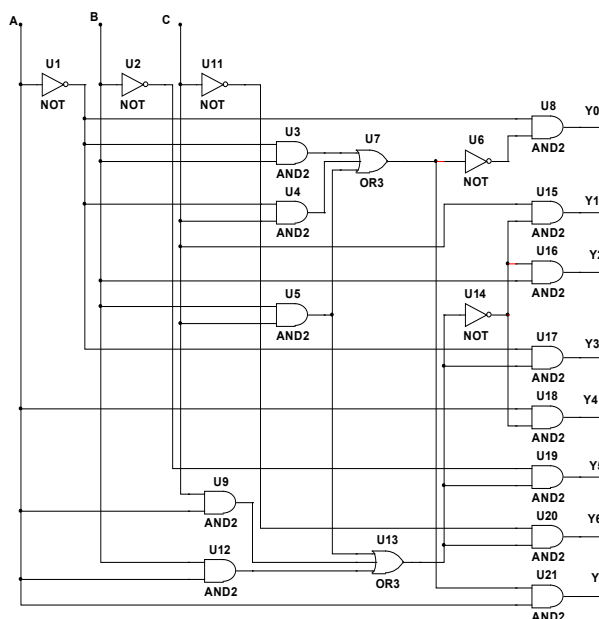
Сравнительная характеристика по числу элементов в мажоритарной и бинарной логиках базовой логической схемы DEC 3-8, построенной по (43)-(50), и логической схемы DEC 3-8, построенной по (54)-(61), показана в табл.8. В мажоритарной логике обе рассматриваемые схемы имеют пятнадцать QCA вентилях. Несмотря на это, применение метода мажоритарных преобразований позволило найти математическую модель (54)-(61), благодаря которой стало возможным построение логической схемы DEC 3-8 только с двумя мажоритарными элементами на первом уровне и восемью – на втором, но в то же время заметим, что число инверторов предложенной схемы DEC 3-8 по сравнению с базовой схемой DEC 3-8 увеличилось на два.

Отличительной чертой схемы DEC 3-8, выполненной по (54)-(61), является также то, что ее первый уровень является отказоустойчивым. В итоге надежность функционирования данной схемы выше по сравнению с базовой, построенной по (43)-(50). Реализация отказоустойчивости DEC 3-8 в бинарной логике требует дополнительных аппаратных затрат. По-

этому в бинарной логике логическая схема DEC 3-8, показанная на рис.10, б), имеет двадцать вентилях, а в этой же логике базовая схема DEC 3-8, представленная на рис. 9, б), имеет только пятнадцать вентилях.



а)



б)

Рис. 10. Двухуровневые логические схемы дешифраторов DEC 3 – 8, построенные по математической модели (54)-(61): а) логическая схема DEC 3-8, первый уровень которой реализован на двух 3-хходовых мажоритарных элементах и пяти инверторах, а второй – на восьми 3-хходовых мажоритарных элементах; б) логическая схема DEC 3-8, построенная при переводе мажоритарного описания (54)-(61) в бинарную логику И, ИЛИ, НЕ

Табл. 8

Сравнение по числу элементов в мажоритарной и бинарной логиках базовой логической схемы DEC 3-8, построенной по (43)-(50), и логической схемы DEC 3-8, построенной по (54)-(61)

Модификации логических схем DEC 3-8	Число элементов в модификациях логических схем DEC 3-8				
	Мажоритарная логика		Бинарная логика		
	Мажоритарные элементы	НЕ	И	ИЛИ	НЕ
Базовая логическая схема DEC 3-8, построенная по (43)-(50)	12	3	12	0	3
Логическая схема DEC 3-8, построенная по (54)-(61)	10	5	13	2	5

Заключение

QCA – нанотехнология продемонстрировала свою эффективность в реализации элементной базы мажоритарной логики. Поэтому разработка QCA аппаратного обеспечения квантовых систем тесно связана с вопросами исследования принципов построения логических схем, основанных на мажоритарной логике.

В статье приведены доказательства основных мажоритарных законов и тождеств исходя из свойств бинарной логики. Произведена классификация мажоритарных функций на простые и сложные, а также показана взаимосвязь между ними. Продемонстрирован переход от мажоритарной к бинарной логике и наоборот.

Предложенная классификация мажоритарных функций приводит к построению математических моделей одноуровневых и многоуровневых мажоритарных схем, предназначенных не только для управления, но и для выполнения вычислительных операций, хранения информации. В качестве примера построения управляющих схем представлен одноуровневый мажоритарный дешифратор DEC 2-4 на шести QCA вентилях, а также два двухуровневых мажоритарных дешифратора DEC 3-8 на пятнадцати QCA вентилях. Математические модели обоих двухуровневых DEC 3-8 получены с помощью метода мажоритарных преобразований. Первый двухуровневый DEC 3-8 является базовым и состоит из двенадцати 3-хходовых мажоритарных элементов и трех инверторов. Данный дешифратор является наиболее известным, однако не обладает свойством отказоустойчивости. Второй двухуровневый DEC 3-8 состоит из десяти 3-хходовых мажоритарных элементов и пяти инверторов. Первый уровень этого DEC 3-8 является отказоустойчивым, что в целом увеличивает надежность функционирования второго дешифратора. В бинарной логике реализация свойства отказоустойчивости требует больших аппаратных затрат. По этой причине при переходе из мажоритарной логики в бинарную число вентилях второго двухуровневого DEC 3-8 возрастает по сравнению с

первым базовым DEC 3-8. В бинарной логике второй двухуровневый DEC 3-8 реализован на двадцати вентилях, а первый – на пятнадцати вентилях.

Показанные логические схемы мажоритарных дешифраторов, а также их математические модели, полученные с помощью метода мажоритарных преобразований, могут использоваться в проектировании сложных схем управления квантовых систем.

Литература

1. Lent C.S., Tougaw P.D., Porod W. A bistable quantum cell for cellular automata // International Workshop Computational Electronics (IWSE).1992. P. 163-166
2. Lent C.S., Tougaw P.D., Porod W., Bernstein G.H. Quantum cellular automata // Nanotechnology. - 1993. Vol. 4. No 1. P. 49-57. DOI: 10.1088/0957-4484/4/1/004
3. Tougaw P.D., Lent C.S. Logical devices implemented using quantum cellular. //Journal of Applied Physics. 1994. Vol.75. No 3. P. 1818-1825
4. Варшавский В.И. Трехзначная мажоритарная логика // Автоматика и телемеханика. 1964. Т.25. №5. С. 673-684.
5. Варшавский В.И., Розенблюм Л.Я. О минимизации пирамидальных схем из мажоритарных элементов //Техническая кибернетика. 1964. №3. С. 24-29.
6. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Основные алгоритмы. 3-е издание. Издательство: Вильямс, 2019. Т. 1. 720 с.
7. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Полуполные алгоритмы. 3-е издание. Издательство: Диалектика, 2020. Т. 2. 832 с.
8. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Сортировка и поиск. 2-е издание. Издательство: Диалектика, 2019. Т. 3. 832 с.
9. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Комбинаторные алгоритмы. Издательство: Вильямс, 2020. Т.4, А. Часть 1. 960 с.
10. Zhang R., Walus K., Wang W., Jullien G.A. A method of majority logic reduction for quantum

- cellular automata // IEEE Transactions on Nanotechnology. 2004. Vol. 3. No 4. P. 443-450. DOI: 10.1109/TNANO.2004.834177
11. Jeon J.-C. Extendable Quantum-Dot Cellular Automata Decoding Architecture Using 5-Input Majority Gate // International Journal of Control and Automation. 2015. Vol. 8. No 12. P. 107-118. <http://dx.doi.org/10.14257/ijca.2015.8.12.10>
 12. Jeon J.-C. Design of Fixed Cell-Based Programmable Logic Gate Using Quantum-Dot CA for Efficiency and Reliability of Digital Systems // IEEE Access. 2024. Vol. 12. P. 187868-187876. Digital Object Identifier 10.1109/ACCESS.2024.3508736
 13. Bhattacharjee P.K. Digital Combinational Circuits Design By QCA Gates // International Journal of Computer and Electrical Engineering. 2010. Vol. 2. No 1. P. 67-72
 14. Akers S.B. Synthesis of combinational logic using three-input majority gates // 3rd Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design (SWCT 1962). Chicago, IL, USA. 1962. P. 149-158. DOI: 10.1109/FOCS.1962.16
 15. Chakrabarty R., Roy S., Pathak T., Kumar Mandal N. Design of Area Efficient Single Bit Comparator Circuit using Quantum dot Cellular Automata and its Digital Logic Gates Realization // International Journal of Engineering. 2021. Vol. 34. No 12. P. 2672-2678
 16. Kong K., Shang Y., Lu R. An Optimized Majority Logic Synthesis Methodology for Quantum-Dot Cellular Automata // IEEE Transactions on Nanotechnology. 2010. Vol. 9. No 2. P. 170-183. DOI: 10.1109/TNANO.2009.2028609
 17. Dallaki H., Mehran M. Novel Subtractor Design Based on Quantum-Dot Cellular Automata (QCA) Nanotechnology // International Journal of Nanoscience and Nanotechnology. 2015. Vol. 11. No 4. P. 257-262
 18. De D., Purkayastha T., Chattopadhyay T. Design of QCA based Programmable Logic Array using decoder // Microelectronics Journal. 2016. Vol. 55. No 3. P. 92-107.
 19. Parhami B., Abedi D., Jaberipur C. Majority-Logic, its applications, and atomic-scale embodiments // Computers and Electrical Engineering. 2020. Vol. 83. No 1. 106562. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compeleceng.2020.106562>
 20. Song Z., Xie G., Cheng X., Wang L., Zhang Y. An Ultra – Low Cost Multilayer RAM in Quantum - Dot Cellular Automata // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2020. Vol. 67. No 12. P. 3397-3401. <https://doi.org/10.1109/TCSII.2020.2988046>
 21. Almatrood A., George A.K., Singh H. Low-Power Multiplexer Structures Targeting Efficient QCA Nanotechnology Circuit Designs // Electronics. 2021. Vol. 10. No 16. 1885. <https://doi.org/10.3390/electronics10161885>
 22. Chetti S.C., Yatgal O. QCA: A survey and design of logic circuits // Global Transitions Proceedings. 2022. Vol. 3. No 1. P. 142-148
 23. Motalebi F., Sayedsalehi S. Design of Low Power Full-Adder Circuit Using Quantum-dot Cellular Automata // International Journal of Industrial Electronics, Control and Optimization. 2022. Vol. 5. No 1. P. 99-108. <https://doi.org/10.22111/ieco.2022.40569.1395>
 24. Sharma V.K. Parity Generators for Nanocommunication Systems Using QCA Nanotechnology // Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science. 2023. Vol. 67. No 2. P. 229-237. <https://doi.org/10.3311/PPee.20602>
 25. Singh R., Singh P., Bahar A.N. Design of QCA based memory cell using a novel majority voter with physical validation // Nano Communication Networks. 2024. Vol. 41. No 9. 100513. <https://doi.org/10.1016/j.nancom.2024.100513>
 26. Singh R., Singh P. QCA based programmable logic block for implementation of digital circuits in multilayer framework // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. 2025. Vol. 123. No 2. 32. <https://doi.org/10.1007/s10470-025-02375-3>
 27. Dongdong L., Tiantian J. Design and Efficiency Enhancement of Polar Encoder Based on Universal Logic Gates Utilizing QCA Technology // Journal of Microelectronics, Electronic Components and Materials. 2025. Vol. 55. No 2. P. 87-94. <https://doi.org/10.33180/InfMIDEM2025.202>
 28. Cohn M., Lindaman R. Axiomatic Majority-Decision Logic // IRE Transactions on Electronic Computers. 1961. Vol. EC-10. No 1. P. 17-21
 29. Lindaman R.A. Theorem for Deriving Majority-Logic Networks Within an Augmented Boolean Algebra // IRE Transactions on Electronic Computers. 1960. Vol. EC-9. No 3. P. 338-342.
 30. Valiant L. Short monotone formulae for the majority function // Journal of Algorithms. 1984. Vol. 5. No 3. P. 363-366. [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(84\)90016-6](https://doi.org/10.1016/0196-6774(84)90016-6)
 31. Jayalakshmi R., Amutha R. An Optimized High Input Majority Gate Design in Quantum – Dot Cellular Automata // International Journal of Engineering and Manufacturing Science. 2018. Vol. 8. No 1. P. 63-75
 32. Закревский А.Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М.: Наука, 1971. 512 с.

33. Chattopadhyay A., Amaru L., Soeken M., Gaillardon P.-E., De Micheli G. Notes on Majority Boolean Algebra // IEEE 46th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL). Sapporo, Japan. 2016. P. 50-55. DOI: 10.1109/ISMVL.2016.21
34. Chattopadhyay A., Bhattacharjee D., Maitra S. Improved Linear Decomposition of Majority and Threshold Boolean Functions // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2023. Vol. 42. No 11. P. 3951-3957. <https://doi.org/10.1109/TCAD.2023.3257082>
35. Amaru L., Gaillardon P.-E., Chattopadhyay A., De Micheli G. A Sound and Complete Axiomatization of Majority-n Logic // IEEE Transactions on Computers. 2016. Vol. 65. No 9. P. 2889-2895. DOI: 10.1109/TC.2015.2506566
36. Testa E., Soeken M., Amaru L., Haaswijk W., De Micheli G. Mapping monotone Boolean functions into majority // IEEE Transactions on Computers. 2019. Vol. 68. No 5. P. 791-797. <https://doi.org/10.1109/TC.2018.2881245>
37. Makanda K., Jeon J.-C. Combinational circuit design based on quantum-dot cellular automata // International Journal of Control and Automation. 2014. Vol. 7. No 6. P. 369-378
38. Seyedi S., Navimipour N.J. An Optimized Three-Level Design of Decoder Based on Nanoscale Quantum-Dot Cellular Automata // International Journal of Theoretical Physics. 2018. Vol. 57. No 7. P. 2022–2033
39. Chakrabarty R., Roy S., Pathak T., Ghosh D., Mandal N. K., Design of 2:4 and 3:8 decoder circuit using QCA technology // NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. 2021. Vol. 12. No 4. P. 442-452
40. Heydari M., Rezai A., Javaheri F. Design of Novel 2:4 Decoder Circuits for Quantum-dot Cellular Automata technology // Journal of Modeling & Simulation in Electrical & Electronics Engineering (MSEEE). 2024. Vol. 3. No 4. P. 23-30
41. Jeon J.-C. Low Hardware Complexity QCA Decoding Architecture Using Inverter Chain // International Journal of Control and Automation. 2016. Vol. 9. No 4. P. 347-358

Черноусова Татьяна Геннадьевна. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия. Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики», г. Москва, Россия. Доцент, кандидат технических наук. Область научных интересов: параллельные вычисления, нанотехнологии, математическое моделирование, нечеткая логика, искусственный интеллект. E-mail: anakiz100@yandex.ru.

Fundamentals of constructing combinational control circuits using majority logic elements for quantum systems

T.G. Chernousova^{I,II}

^I Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Bauman Moscow State Technical University» (BMSTU) Moscow, Russia

^{II} Moscow Technical University of Communication and Informatics, Moscow, Russia

Abstract. One promising post-CMOS technology is QCA nanotechnology (Quantum-dot Cellular Automata nanotechnology). The creation of quantum systems based on it will enable high-speed, low-power information processing. As a rule, the design of such systems is based on the elemental basis of majority logic. This article classifies majority functions into simple and complex, and demonstrates the relationship between them. Proofs are based on the laws and rules of Boolean algebra. Based on the proposed classification, majority logic circuits constructed using the corresponding mathematical models can be divided into single-level and multi-level. An illustration of a single-level circuit is the DEC 2-4 majority decoder, and an illustration of a two-level circuit is the DEC 3-8 majority decoder. The presented mathematical models DEC 2-4 and DEC 3-8 can be used in the development of complex models of control signal generation for quantum systems for various purposes.

Keywords: *quantum systems, QCA – nanotechnology, simple and majority functions, majority logic, mathematical model of the majority decoder.*

DOI: 10.14357/20790279260211 **EDN:** GASGRD

References

1. Lent C.S., Tougaw P.D., Porod W. A bistable quantum cell for cellular automata. *International Workshop Computational Electronics (IWSE)*. 1992; 163-166.
2. Lent C.S., Tougaw P.D., Porod W., Bernstein G.H. *Quantum cellular automata. Nanotechnology*. 1993; 4(1):49-57.
3. Tougaw P.D., Lent C.S. Logical devices implemented using quantum cellular. *Journal of Applied Physics*. 1994; 75(3):1818-1825.
4. Varshavskiy V.I. Ternary majority logic. *Automation and Remote Control*. 1964; 25(5): 673-684 (in Russ.).
5. Varshavskiy V.I., Rozenblyum L.Ya. On minimization of pyramidal circuits composed of majority elements. *Soviet Technical Cybernetics*. 1964; (3): 24-29 (in Russ.).
6. Knuth D.E. *The Art of Computer Programming. Fundamental Algorithms*. 3-ed, v.1. Moscow: Williams; 2019. 720 p. (in Russ.).
7. Knuth D.E. *The Art of Computer Programming. Seminumerical Algorithms*. 3-ed, v.2. Moscow: Dialektika Kompyuternoe Izdatelstvo; 2020. 832 p. (in Russ.).
8. Knuth D.E. *The Art of Computer Programming. Sorting and Searching*. 2-ed, v.3. Moscow: Dialektika Kompyuternoe Izdatelstvo; 2019. 832 p. (in Russ.).
9. Knuth D.E. *The Art of Computer Programming. Combinatorial Algorithms*. v.4A, part 1. Moscow: Williams; 2020. 960 p. (in Russ.).
10. Zhang R., Walus K., Wang W., Jullien G.A. A method of majority logic reduction for quantum cellular automata. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2004; 3(4): 443-450. doi: 10.1109/TNANO.2004.834177
11. Jeon J-C. Extendable Quantum-Dot Cellular Automata Decoding Architecture Using 5-Input Majority Gate. *International Journal of Control and Automation*. 2015; 8(12): 107-118. <http://dx.doi.org/10.14257/ijca.2015.8.12.10>
12. Jeon J-C. Design of Fixed Cell-Based Programmable Logic Gate Using Quantum-Dot CA for Efficiency and Reliability of Digital Systems. *IEEE Access*. 2024; (12): 187868-187876. Digital Object Identifier 10.1109/ACCESS.2024.3508736
13. Bhattacharjee P.K. Digital Combinational Circuits Design By QCA Gates. *International Journal of Computer and Electrical Engineering*. 2010; 2(1): 67-72.
14. Akers S.B. Synthesis of combinational logic using three-input majority gates. In: *3rd Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design, SWCT 1962*. Chicago, IL, USA; 1962; 149-158. doi: 10.1109/FOCS.1962.16
15. Chakrabarty R., Roy S., Pathak T., Kumar Mandal N. Design of Area Efficient Single Bit Comparator Circuit using Quantum dot Cellular Automata and its Digital Logic Gates Realization. *International Journal of Engineering*. 2021; 34(12): 2672-2678.
16. Kong K., Shang Y., Lu R. An Optimized Majority Logic Synthesis Methodology for Quantum-Dot Cellular Automata. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2010; 9(2): 170-183. doi: 10.1109/TNANO.2009.2028609

17. Dallaki H., Mehran M. Novel Subtractor Design Based on Quantum-Dot Cellular Automata (QCA) Nanotechnology. *International Journal of Nanoscience and Nanotechnology*. 2015; 11(4): 257-262.
18. De D., Purkayastha T., Chattopadhyay T. Design of QCA based Programmable Logic Array using decoder. *Microelectronics Journal*. 2016; 55 (3): 92-107.
19. Parhami B., Abedi D., Jaberipur C. Majority-Logic, its applications, and atomic-scale embodiments. *Computers and Electrical Engineering*. 2020; 83(1): 106562. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compeleceng.2020.106562>
20. Song Z., Xie G., Cheng X., Wang L., Zhang Y. An Ultra – Low Cost Multilayer RAM in Quantum - Dot Cellular Automata. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. 2020; 67(12): 3397-3401. <https://doi.org/10.1109/TCSII.2020.2988046>
21. Almatrood A., George A.K., Singh H. Low-Power Multiplexer Structures Targeting Efficient QCA Nanotechnology Circuit Designs. *Electronics*. 2021; 10 (16): 1885. <https://doi.org/10.3390/electronics10161885>
22. Chetti S.C., Yatgal O. QCA: A survey and design of logic circuits. *Global Transitions Proceedings*. 2022; 3(1): 142-148. [10.1016/j.gltp.2022.04.012](https://doi.org/10.1016/j.gltp.2022.04.012)
23. Motalebil F., Sayedsalehi S. Design of Low Power Full-Adder Circuit Using Quantum-dot Cellular Automata. *International Journal of Industrial Electronics, Control and Optimization*. 2022; 5(1): 99-108. <https://doi.org/10.22111/ieco.2022.40569.1395>
24. Sharma V.K. Parity Generators for Nanocommunication Systems Using QCA Nanotechnology. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science*. 2023; 67 (2): 229-237. <https://doi.org/10.3311/PPEe.20602>
25. Singh R., Singh P., Bahar A.N. Design of QCA based memory cell using a novel majority voter with physical validation. *Nano Communication Networks*. 2024; 41(9): 100513. <https://doi.org/10.1016/j.nancom.2024.100513>
26. Singh R., Singh P. QCA based programmable logic block for implementation of digital circuits in multilayer framework. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. 2025; 123(2): 32. <https://doi.org/10.1007/s10470-025-02375-3>
27. Dongdong L., Tiantian J. Design and Efficiency Enhancement of Polar Encoder Based on Universal Logic Gates Utilizing QCA Technology. *Journal of Microelectronics, Electronic Components and Materials*. 2025; 55(2): 87-94. <https://doi.org/10.33180/InfMIDEM2025.202>
28. Cohn M., Lindaman R. Axiomatic Majority-Decision Logic. *IRE Transactions on Electronic Computers*. 1961; EC-10(1):17-21.
29. Lindaman R.A. Theorem for Deriving Majority-Logic Networks Within an Augmented Boolean Algebra. *IRE Transactions on Electronic Computers*. 1960; EC-9(3): 338-342.
30. Valiant L. Short monotone formulae for the majority function. *Journal of Algorithms*. 1984; 5(3): 363–366. [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(84\)90016-6](https://doi.org/10.1016/0196-6774(84)90016-6)
31. Jayalakshmi R., Amutha R. An Optimized High Input Majority Gate Design in Quantum – Dot Cellular Automata. *International Journal of Engineering and Manufacturing Science*. 2018; 8(1): 63-75.
32. Zakrevskiy A.D. *Algorithms for Synthesis of Discrete Automata*. Moscow: Nauka; 1971. 512p. (in Russ.).
33. Chattopadhyay A., Amaru L., Soeken M., Gaillardon P-E., De Micheli G. Notes on Majority Boolean Algebra. *IEEE 46th International Symposium on Multiple-Valued Logic, ISMVL 2016*. Sapporo, Japan; 2016; 50-55. doi: 10.1109/ISMVL.2016.21
34. Chattopadhyay A., Bhattacharjee D., Maitra S. Improved Linear Decomposition of Majority and Threshold Boolean Functions. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 2023; 42(11): 3951-3957. <https://doi.org/10.1109/TCAD.2023.3257082>
35. Amaru L., Gaillardon P-E., Chattopadhyay A., De Micheli G. A Sound and Complete Axiomatization of Majority-n Logic. *IEEE Transactions on Computers*. 2016; 65(9): 2889-2895. doi: 10.1109/TC.2015.2506566
36. Testa E., Soeken M., Amaru L., Haaswijk W., De Micheli G. Mapping monotone Boolean functions into majority. *IEEE Transactions on Computers*. 2019; 68(5): 791-797. <https://doi.org/10.1109/TC.2018.2881245>
37. Makanda K., Jeon J-C. Combinational circuit design based on quantum-dot cellular automata. *International Journal of Control and Automation*. 2014; 7(6): 369-378.
38. Seyedi S., Navimipour N.J. An Optimized Three-Level Design of Decoder Based on Nanoscale Quantum-Dot Cellular Automata. *International Journal of Theoretical Physics*. 2018; 57 (7): 2022–2033.
39. Chakrabarty R., Roy S., Pathak T., Ghosh D., Mandal N.K. Design of 2:4 and 3:8 decoder

- circuit using QCA technology. *NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS*. 2021; 12(4): 442-452.
40. Heydari M., Rezai A., Javaheri F. Design of Novel 2:4 Decoder Circuits for Quantum-dot Cellular Automata technology. *Journal of Modeling & Simulation in Electrical & Electronics Engineering (MSEEE)*. 2024; 3(4): 23-30.
41. Jeon J-C. Low Hardware Complexity QCA Decoding Architecture Using Inverter Chain. *International Journal of Control and Automation*. 2016; 9(4): 347-358.

Chernousova Tat’jana G. PhD, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Bauman Moscow State Technical University» (BMSTU), 2-nd Baumanskaya str., 5, bldg. 5, Moscow, 105005, Russia. Moscow Technical University of Communication and Informatics, Aviamotornaya str., 8A, Moscow, 111024, Russia. Research interests: parallel computing, nanotechnology, mathematical modeling, fuzzy logic, artificial intelligence. E-mail: anakiz100@yandex.ru