

Системное моделирование

Синтез наблюдателей смешанных переменных в следящей системе однозвенного манипулятора*

Д.В. КРАСНОВ, А.В. УТКИН

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. Для однозвенного манипулятора с бездатчиковым приводом рассматривается синтез следящей системы при параметрических и внешних несогласованных возмущениях. В предположении о гладкости внешних возмущений математическая модель объекта приведена к канонической форме «вход – выход» относительно смешанных переменных, которые являются функциями от переменных состояния, внешних воздействий и их производных. Для синтеза следящей системы применен метод линеаризации обратной связью по выходу. В контур обратной связи введен редуцированный наблюдатель для оценивания смешанных переменных и обобщенных возмущений, включающих управляющий сигнал с неопределенным множителем. Основной результат состоит в разработанном упрощенном методе настройки наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями с насыщением на основе эталонного полинома, от запаса устойчивости которого зависит ошибка оценивания. Приведены результаты численного моделирования, демонстрирующие преимущества разработанного наблюдателя по сравнению с типовым наблюдателем с линейной коррекцией без насыщения.

Ключевые слова: однозвенный манипулятор, слежение, неопределенные параметры, внешние несогласованные возмущения, наблюдатель состояния и возмущения, вложенные сатураторы.

DOI: 10.14357/20790279260209 **EDN:** XMBXVQ

Введение

Метод линеаризации обратной связью по выходу позволяет с единых позиций проектировать универсальные законы управления выходными переменными для большого класса нелинейных систем, математические модели которых допускают многократное дифференцирование и являются дифференциально-плоскими [1]. При выполнении ряда условий математические модели таких систем приводимы к блочно-канонической форме «вход – выход» с согласованными обобщенными нелинейностями, действующими по одним каналам с управлением. В задаче стабилизации в

качестве выхода рассматриваются регулируемые переменные, в задаче слежения – невязки между регулируемыми переменными и эталонными траекториями (ошибки слежения), при этом обобщенные нелинейности включают производные эталонных траекторий. В условиях параметрической определенности модели объекта, полных измерений внутренних и внешних сигналов обобщенные нелинейности компенсируются с помощью комбинированного управления со стабилизирующей линейной составляющей. В результате замкнутая виртуальная система «вход – выход» становится линейной, что позволяет применить к ней известные методы модального синтеза, обеспечивающие заданное поведение выходных переменных.

* Исследование частично поддержано РНФ, проект 25-11-00067, <https://rscf.ru/project/25-11-00067/>.

В рамках данного подхода рассматривались также нелинейные системы с согласованными внешними возмущениями и неопределенными параметрами, но с существенными ограничениями на тип допустимых нелинейностей и неопределенностей, к оцениванию которых применимы методы адаптивного управления [2–8]. В условиях неопределенности и неполных измерений линеаризующее управление реализуется с помощью динамической обратной связи. Для получения оценок неопределенных сигналов и параметров в реальном времени в контур обратной связи вводятся динамические наблюдатели состояния и возмущений, идентификаторы неопределенных параметров, а также динамические генераторы внешних воздействий.

В работах [9–10] показано, что метод линеаризации обратной связью по выходу применим к нелинейным системам с несогласованными внешними возмущениями, если они полагаются гладкими функциями времени и при многократном дифференцировании выходных переменных не изменяют относительный порядок, присущий соответствующей невозмущенной системе. Тогда с помощью диффеоморфных преобразований модель объекта управления приводится к эквивалентной блочно-канонической форме «вход – выход» в координатном базисе смешанных переменных, которые являются функциями от переменных состояния объекта, внешних воздействий и их производных. Данная каноническая форма, где в явном виде присутствует только обобщенное согласованное возмущение, является единой основой для решения задач слежения и наблюдения, что очень упрощает микропроцессорную реализацию следящей системы. Показано, что при измерении выходных переменных и параметрической определенности входных каналов управления всю необходимую информацию для синтеза динамической обратной связи можно получить с помощью редуцированного наблюдателя смешанных переменных и обобщенных возмущений с кусочно-линейными корректирующими воздействиями с насыщением (sat-коррекция). Такой подход не требует индивидуального оценивания неопределенных параметров, внешних возмущений и неизмеряемых переменных вектора состояния с помощью соответствующих динамических моделей, которые в несколько раз увеличивают динамический порядок замкнутой системы и усложняют структуру регулятора.

В данной работе указанный подход применяется к синтезу системы слежения углового положения однозвенного манипулятора, функционирующего в условиях неполной информации о внешних и внутренних сигналах, а также параметрах объекта

управления. Показано, что при параметрической неопределенности входного канала часть управления с неопределенным множителем может быть отнесена к обобщенному возмущению, что позволяет реализовать и наблюдатель, и комбинированное управление, линеаризующее замкнутую систему. Научная новизна состоит в предложенном упрощенном алгоритме настройки sat-коррекции редуцированного наблюдателя смешанных переменных и обобщенного возмущения с использованием эталонного полинома.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 дается описание математической модели объекта управления и постановка задачи. Представлены процедура получения канонической формы «вход – выход» и базовый закон комбинированного управления, линеаризующего замкнутую каноническую систему. В разделе 2 для канонической системы с неопределенным входом спроектирован наблюдатель смешанных переменных с кусочно-линейными корректирующими воздействиями с насыщением. Основной результат состоит в упрощенном алгоритме выбора коэффициентов усиления sat-коррекции, обеспечивающих заданную точность решения задачи наблюдения. В разделе 3 приведены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов, демонстрирующие робастные свойства следящей системы и преимущества разработанного наблюдателя по сравнению с наблюдателем с линейной коррекцией без насыщения.

1. Синтез следящей системы в рамках метода линеаризации обратной связью по выходу

Объектом управления является однозвенный манипулятор, который эластично соединен с валом редуктора и управляется бездатчиковым двигателем постоянного тока. Без учета быстрой динамики токового контура математическая модель имеет следующий вид [11]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}(x_3 - x_1) - \\ &- a_{22} \sin(x_1) + f_1(t), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \quad \dot{x}_4 = -a_{43}(x_3 - x_1) - \\ &- a_{44}x_4 + b_4u + f_2(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x_{1,2} \in R$ – угловые положение и скорость манипулятора, $x_{3,4} \in R$ – угловые положение и скорость вала редуктора; $a_{ij} > 0$, $b_4 > 0$, $t \geq 0$ – конструктивные параметры [12], которые точно не известны, но их значения находятся в допустимых диапазонах; u – управление, в качестве которого рассматривается ток якоря, b_4u – крутящий момент, приложенный к валу редуктора; $f_{1,2}(t)$ – внешние возмущения, которые полагаются неизвестными функциями

времени, ограниченными вместе со своими производными известными константами.

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание угловым положением манипулятора $x_1(t)$ эталонной траектории $g(t)$ с заданной точностью в установившемся режиме:

$$|x_1(t) - g(t)| \leq \Delta, t \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Предполагается, что имеется только датчик углового положения $x_1(t)$; манипулятор с комплексным исполнительным устройством способен отработать эталонную траекторию $g(t)$, которая задается в виде детерминированного сигнала, его производные неизвестны, но ограничены. Поставленная задача решается в рамках метода линеаризации обратной связью по выходу с минимальным динамическим расширением, поэтому индивидуальное оценивание неопределенных параметров и внешних воздействий не применяется. Вспомогательная задача состоит в синтезе наблюдателя смешанных переменных канонической формы, по которым будет сформировано линеаризующее управление.

В системе (1) возмущение $f_2(t)$ действует по одному каналу с управлением, т.е. является согласованным. Возмущение $f_1(t)$ является несогласованным, но его входной канал не зависит от переменных состояния, поэтому факт его наличия не изменяет относительный порядок по управлению, присущий невозмущенной системе при $f_1(t) \equiv 0$ [9], которая очевидно является управляемой и наблюдаемой относительно $x_1(t)$. Составим на основе математической модели (1) каноническую форму «вход – выход», рассматривая в качестве выходных переменных ошибку слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ и дифференцируя ее до появления управления:

$$\dot{e}_i = e_{i+1}, i = \overline{1,3}; \dot{e}_4 = \psi(t) + bu, \quad (3)$$

где $e_i, i = \overline{1,4}$ – смешанные переменные нового координатного базиса, $\psi(t)$ – обобщенное возмущение, которое зависит от неопределенных параметров, внешних воздействий и их производных:

$$\begin{aligned} e_2 &= x_2 - \dot{g}(t), \\ e_3 &= a_{21}(x_3 - x_1) - a_{22} \sin x_1 + f_1(t) - \ddot{g}(t), \\ e_4 &= a_{21}(x_4 - x_2) - a_{22}x_2 \cos x_1 + \dot{f}_1(t) - \ddot{g}(t), \\ b &= a_{21}b_4, \\ \psi(t) &= a_{21}[(a_{43} + a_{21} + a_{22} \cos x_1)(x_1 - x_3) - \\ &\quad - a_{44}x_4 + f_2(t)] + \\ &\quad + (a_{21} + a_{22} \cos x_1 + x_2^2)a_{22} \sin x_1 - \\ &\quad - (a_{21} + a_{22} \cos x_1)f_1(t) + \dot{f}_1(t) - g^{(4)}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Предполагается, что в системе (3) множитель управления $b = a_{21}b_4 > 0$, который зависит от неопределенных параметров объекта (1), можно представить в виде суммы номинального $b_0 = \text{const} > 0$ (известного) и неопределенного слагаемых в следующем виде:

$$\begin{aligned} b &= b_0 + \Delta b, \text{sign}(b_0) = \\ &= \text{sign}(b_0 + \Delta b) = +1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\Delta b| / b_0 < 1, t \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда часть управления с неопределенным множителем можно отнести к обобщенному возмущению, которое полагается неизвестной функцией времени с ограниченной производной. При этом система (3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, i = \overline{1,3}; \\ \dot{e}_4 &= e_5(t) + b_0 u, \\ e_5 &= \psi(t) + \Delta b u. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, получена каноническая форма «вход – выход» (6) с согласованным возмущением и известным множителем управления, на основе которой синтезируется линеаризующее комбинированное управление:

$$\begin{aligned} u &= -(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \\ &\quad + \tilde{n}_3 \dot{e}_3 + c_4 e_4 + e_5(t)) / b_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $c_i = \text{const} > 0$ – коэффициенты эталонного гурвицева полинома:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i) &= \lambda^4 + c_4 \lambda^3 + \\ &\quad + c_3 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_1, \text{Re } \lambda_i < 0, i = \overline{1,4} \end{aligned} \quad (8)$$

корни которого назначаются исходя из требований к переходному процессу по ошибке слежения. Замкнутая виртуальная система (6)–(7) является линейной и устойчивой:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, i = \overline{1,3}; \\ \dot{e}_4 &= -(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + c_4 e_4). \end{aligned} \quad (9)$$

Для «худших» (как правило, максимальных по модулю) значений неопределенных параметров, внешних и задающих воздействий, а также с учетом диапазона допустимых начальных значений переменных состояния системы (1), из выражений (4), (6), (7) можно получить консервативные оценки для диапазонов изменения обобщенного возмущения, его производной, а также смешанных переменных системы (9):

$$|e_i(t)| \leq E_i, i = \overline{1,5}; |\dot{e}_i(t)| \leq \bar{E}_5, t \geq 0. \quad (10)$$

Очевидно, что смешанные переменные максимальны по модулю в начале переходного процесса. Точная линеаризация замкнутой канонической системы (9) и асимптотическая сходимость в нуль ее переменных (в том числе, ошибки слежения $e_1(t)$) обеспечивается в условиях полной определенности. По априорным предположениям известен только выход $e_1(t)$ системы (6). На основе этих измерений в следующем разделе проектируется наблюдатель для оценивания остальных переменных, используемых для синтеза обратной связи (7).

Пусть $\tilde{e}_i(t), i = \overline{2,5}$ – оценки смешанных переменных, полученные с помощью динамического наблюдателя с некоторой ошибкой $\delta > 0$ в установившемся режиме:

$$|e_i(t) - \tilde{e}_i(t)| \leq \delta, i = \overline{2,5}, t \geq T. \quad (11)$$

Комбинированное управление (7), реализуемое в системе с наблюдателем в виде:

$$u = -(c_1 e_1 + c_2 \tilde{e}_2 + c_3 \tilde{e}_3 + c_4 \tilde{e}_4 + \tilde{e}_5(t)) / b_0 \quad (12)$$

привносит в последнее уравнение замкнутой виртуальной системы (6), (11) обобщенную ошибку оценивания $\phi(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, i = \overline{1,3}; \\ \dot{e}_4 &= -(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + c_4 e_4) + \phi(t), \\ |\phi(t)| &\leq (c_2 + c_3 + c_4 + 1)\delta = \Phi, t \geq T, \end{aligned} \quad (13)$$

что порождает ненулевую ошибку слежения в установившемся режиме (2). Для вектора смешанных переменных $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T \in R^4$ системы (13) имеет место оценка:

$$\|e(t)\| \leq C(\exp(-\nu t)\|e(\dot{0})\| + \Phi/\nu), t \geq T, \quad (14)$$

где $0 < \nu \leq \min\{-\operatorname{Re} \lambda_i\}_{i=\overline{1,4}}$ – степень устойчивости, $C(\nu) = \operatorname{const} > 0$. Например, в случае различных действительных собственных значений $\lambda_i < 0, i = \overline{1,4}$ (8) константа $C = \|D\| \|D^{-1}\|$, где $D^{4 \times 4}$ – матрица Вандермонда со столбцами $\operatorname{col}(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3), i = \overline{1,4}$. Пренебрегая затухающими свободными движениями смешанных переменных, из (14) получим оценку ошибки слежения в установившемся режиме в зависимости от выбранного полинома (8):

$$\begin{aligned} |e_i(t)| &= |x_i(t) - g(t)| \leq \\ &\leq C\Phi / \nu \leq \Delta, t \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) следуют требования к ошибке оценивания:

$$0 < \delta \leq \Delta \nu / (C(c_2 + c_3 + c_4 + 1)), \quad (16)$$

которые надо обеспечить при синтезе наблюдателя для выполнения целевого условия (2).

2. Синтез наблюдателей смешанных переменных

Для реализации комбинированного управления (12) нужно восстановить смешанные переменные $e_2(t), \dots, e_5(t)$. Эта задача решается с помощью динамического наблюдателя, который строится на основе системы (6) в следующем виде:

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + v_i, i = \overline{1,3}; \dot{z}_4 = b_0 u + v_4, \quad (17)$$

где $\underline{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T \in R^4$ – вектор состояний, $v_i (i = \overline{1,4})$ – корректирующие воздействия наблюдателя, которые формируются на основе измерений $e_5(t)$ так, чтобы обеспечить стабилизацию с заданной точностью (16) системы относительно ошибок наблюдения $\varepsilon = e - z = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^T \in R^4$. В силу (6), (17) имеем виртуальную систему:

$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - v_i, i = \overline{1,3}; \dot{\varepsilon}_4 = e_5 - v_4, \quad (18)$$

где $e_5(t)$ полагается ограниченным возмущением с ограниченной производной (10). При установке в наблюдателе (17) нулевых начальных значений в силу (10) можно дать следующие избыточные оценки для начальных значений виртуальной системы (18):

$$\begin{aligned} z_i(0) &= 0 \Rightarrow \varepsilon_i(0) = e_i(0), \\ |\varepsilon_i(0)| &< E_i, i = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Наблюдатель (17) является редуцированным: в отличие от стандартных подходов [13–14] он не дополняется уравнением динамики обобщенного возмущения $e_5(t)$. Для системы (18) ставится задача стабилизации не только ошибок наблюдения, но и их производных. Тогда в качестве оценки возмущения можно принять корректирующее воздействие последнего блока:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i(t)| &= |e_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, i = \overline{1,4}; \\ |\dot{\varepsilon}_4(t)| &= |e_5(t) - v_4(t)| \leq \delta, t \geq T. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, $\tilde{e}_i(t) = z_i(t), i = \overline{2,4}$, $\tilde{e}_5(t) = v_4(t)$, и в замкнутой системе с наблюдателем (17) комбинированное управление (12) будет реализовано в виде:

$$u = -(c_1 e_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + c_4 z_4 + v_4(t)) / b_0. \quad (21)$$

Для решения поставленной задачи (20) в системах (17), (18) применяются кусочно-линейные корректирующие воздействия с насыщением в виде вложенных сатураторов:

$$v_1 = m_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \begin{cases} m_1 \text{sign}(\varepsilon_1), |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ m_1 l_1 \varepsilon_1, |\varepsilon_1| \leq 1/l_1; \end{cases} \quad (22)$$

$$v_i = m_i \text{sat}(l_i v_{i-1}) = \begin{cases} m_i \text{sign}(v_{i-1}), |v_{i-1}| > 1/l_i, \\ m_i l_i v_{i-1}, |v_{i-1}| \leq 1/l_i, \end{cases}$$

которые имеют по два настраиваемых коэффициента усиления: $m_i, l_i = \text{const} > 0, i = 1, 4$.

В работах [9; 12; 15] в рамках метода разделения движений, когда общее движение вектора ошибок наблюдения $\varepsilon(t)$ разделяется на разнотемповые составляющие, получены иерархические системы неравенств для настройки коэффициентов наблюдателя (17), (22), при которых задача наблюдения решается с заданной точностью за заданное время (20). Эти результаты имеют теоретическую значимость, так как доказывают существование решения задачи, но для одноканальных систем большой размерности настройка наблюдателя на основе полученных неравенств достаточно трудоемка и приводит к консервативным оценкам. В данной работе предлагается упрощенный алгоритм настройки с использованием эталонного полинома, рекомендуемый для практического использования.

Амплитуды $m_i, i = 1, 4$ корректирующих воздействий выбираются так, чтобы обеспечить в замкнутой системе (18), (22) быструю сходимость ошибок наблюдения в некоторые окрестности нуля, где корректирующие воздействия (22) становятся линейными. Вне линейных зон систему (18), (22) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 - m_1 \text{sign}(\varepsilon_1), \\ \dot{\varepsilon}_i &= \varepsilon_{i+1} - m_i \text{sign}(v_{i-1}) = \\ &= \varepsilon_{i+1} - m_i \text{sign}(\varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}), i = \overline{2, 4}. \end{aligned} \quad (23)$$

При упрощенной настройке не учитываются быстро затухающие переходные процессы ошибок наблюдения, их производных и малое время $T > 0$, за которое последовательно, сверху-вниз все корректирующие воздействия сойдутся в соответствующие линейные зоны. С учетом (10), (19) можно грубо оценить диапазоны изменения ошибок наблюдения в переходном процессе: $|\varepsilon_i(t)| \leq E_i, i = \overline{1, 4}, t \geq 0$. Тогда из достаточных условий $\varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i < 0, i = \overline{1, 4}$, примененных к системе (23), получим упрощенные неравенства для выбора амплитуд корректирующих воздействий (22), обеспечивающих их попадание при $0 < t < T$ и нахождение при $t > T$ в линейных зонах:

$$\begin{aligned} m_i > \{E_{i+1}; m_{i+1}\} &\Rightarrow |\varepsilon_i(t)| \leq \\ &\leq 1/l_i + |\dot{\varepsilon}_{i-1}(t_i)|, t \geq t_i, i = \overline{1, 4} \end{aligned} \quad (24)$$

где $\dot{\varepsilon}_0 \equiv 0, m_5 \equiv 0$ и

$$\begin{aligned} 0 < T &\leq t_1 + t_2 + t_3 + t_4, \\ \frac{E_i}{m_i + E_{i+1}} &\leq t_i \leq \frac{E_i}{m_i - E_{i+1}}, \\ i &= \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (25)$$

В выражение (24) специально введено условие $m_i > m_{i+1}, i = 1, 3$, которое обеспечивает требуемую последовательность (сверху-вниз) стабилизации ошибок наблюдения.

При $t > T$ (25) корректирующие воздействия становятся линейными:

$$\begin{aligned} v_1 &= m_1 l_1 \varepsilon_1, v_2 = m_2 l_2 v_1, \\ v_3 &= m_3 l_3 v_2, v_4 = m_4 l_4 v_3, \end{aligned} \quad (26)$$

тогда виртуальную замкнутую систему (18), (26) можно представить в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \bar{A} \varepsilon + \bar{B} \varepsilon_5, \\ \bar{A} &= \begin{pmatrix} -m_1 l_1 & 1 & 0 & 0 \\ -m_2 l_2 m_1 l_1 & 0 & 1 & 0 \\ -m_3 l_3 m_2 l_2 m_1 l_1 & 0 & 0 & 1 \\ -m_4 l_4 m_3 l_3 m_2 l_2 m_1 l_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Для анализа сходимости производных ошибок наблюдения составим также вспомогательную систему, которая при $t > T$ имеет вид, аналогичный (27):

$$\ddot{\varepsilon} = \bar{A} \dot{\varepsilon} + \bar{B} \dot{\varepsilon}_5. \quad (28)$$

Коэффициенты коррекции $l_i, i = \overline{1, 4}$ выбираются так, чтобы обеспечить стабилизацию систем (27), (28) с заданной точностью (20) в установившемся режиме. Для их упрощенной настройки вводится эталонный гурвицев полином:

$$\prod_{i=1}^4 (\lambda - \bar{\lambda}_i) = \lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4, \quad (29)$$

$$\bar{\lambda}_i \in C : \text{Re } \bar{\lambda}_i < 0, i = \overline{1, 4},$$

параметры которого выполняют роль больших коэффициентов в малой окрестности нуля.

Запас устойчивости в замкнутых системах (27), (28) должен быть больше, чем в замкнутой системе (6), (7), и, кроме того:

$$\begin{aligned} \min \{-\text{Re } \bar{\lambda}_i\}_{i=\overline{1, 4}} &\geq \bar{\nu} > \\ &> \max \{-\text{Re } \lambda_i\}_{i=\overline{1, 4}} = \chi > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Как известно, этот прием используется в классических линейных наблюдателях состояния (17), построенных на основе канонических форм [16], где модальный синтез линейных корректиру-

ющих воздействий на основе эталонного полинома (29) в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= p_1 \varepsilon_1, v_2 = p_2 \varepsilon_1, \\ v_3 &= p_3 \varepsilon_1, v_4 = p_4 \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (31)$$

приводит к следующей матрице замкнутой системы (18), (31):

$$\dot{\varepsilon} = \bar{A}\varepsilon + \bar{B}e_s, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 \\ -p_2 & 0 & 1 & 0 \\ -p_3 & 0 & 0 & 1 \\ -p_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Приравнявая покомпонентно элементы первых столбцов матриц систем (27) и (32) при конкретных значениях амплитуд $m_i > 0, i = 1, 4$, принятых на основе неравенств (24), последовательно определяются коэффициенты усиления $l_i > 0, i = 1, 4$, которые в упрощенной настройке (в отличие от выбора на основе неравенств [9; 12; 15]) принимают конкретные значения:

$$\begin{aligned} l_1 &= p_1 / m_1, l_2 = p_2 / (m_2 m_1 l_1), \\ l_3 &= p_3 / (m_3 m_2 l_2 m_1 l_1), \\ l_4 &= p_4 / (m_4 m_3 l_3 m_2 l_2 m_1 l_1). \end{aligned} \quad (33)$$

При $t > T$ (25) для векторов ошибок наблюдения и их производных, являющихся решением линейных систем (27) и (28) соответственно, с учетом (10), (32) справедливы следующие оценки, аналогичные (14):

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq \bar{C}(\|\varepsilon(T)\| \exp(-\bar{\nu}t) + E_s / \bar{\nu}), \\ \|\dot{\varepsilon}(t)\| &\leq \bar{C}(\|\dot{\varepsilon}(T)\| \exp(-\bar{\nu}t) + \bar{E}_s / \bar{\nu}), \\ t > T, \bar{C}(\bar{\nu}) &= \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Отсюда, пренебрегая затухающими свободными движениями, имеем неравенство для выбора запаса устойчивости (30) эталонного полинома (29), обеспечивающего заданную точность оценивания смешанных переменных и обобщенного возмущения в установившемся режиме:

$$\bar{\nu} / \bar{C} \geq \max\{E_s / \delta, \bar{E}_s / \delta, \chi\}. \quad (34)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение: если в системе (18), (19), (22) обобщенное возмущение $e_s(t)$ и его производная ограничены известными константами (10), то выбором амплитуд корректирующих воздействий (24) за конечное время (25) обеспечивается затухание быстрых движений, а точность оценивания в уста-

новившемся режиме (20) обеспечивается выбором степени устойчивости эталонного полинома (34) и коэффициентов усиления (33).

Неравенство (34) в явном виде не разрешимо относительно $\bar{\nu}$. Выбор подходящей величины $\bar{\nu}$ можно произвести на основе результатов моделирования замкнутой системы с несколькими пробными значениями. При необходимости можно использовать также однопараметрическую процедуру. В работах [13, 16] показано, что при использовании эталонного полинома с иерархией действительных корней $\tilde{\lambda}_i < 0: |\tilde{\lambda}_1| = 1, |\tilde{\lambda}_{i+1}| > |\tilde{\lambda}_i|, i = 2, 4$ и большого параметра $\mu > 1$:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^4 (\lambda - \mu \tilde{\lambda}_i) &= \lambda^4 + \mu \tilde{p}_1 \lambda^3 + \\ &+ \mu^2 \tilde{p}_2 \lambda^2 + \mu^3 \tilde{p}_3 \lambda + \mu^4 \tilde{p}_4 \end{aligned} \quad (35)$$

при соответствующем выборе линейных корректирующих воздействий, аналогичном (31):

$$\begin{aligned} v_1 &= \mu \tilde{p}_1 \varepsilon_1, v_2 = \mu^2 \tilde{p}_2 \varepsilon_1, \\ v_3 &= \mu^3 \tilde{p}_3 \varepsilon_1, v_4 = \mu^4 \tilde{p}_4 \varepsilon_1 \end{aligned}, \quad (36)$$

для вектора состояния системы (18), (19), (36) при выполнении (10) имеет место оценка:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq \bar{C}(\tilde{\lambda}, \mu) \|\varepsilon(0)\| \exp(-\mu t) + \\ &+ K(\tilde{\lambda}) E_s / \mu, \end{aligned} \quad (37)$$

где константа $K(\tilde{\lambda}) > 0$ не зависит от μ . В этой схеме заданная точность оценивания смешанных переменных и обобщенного возмущения в установившемся режиме (20) обеспечивается выбором μ , а неравенство (34) примет вид $\mu \geq K(\tilde{\lambda}) \max E_s / \delta, \bar{E}_s / \delta$.

Принципиальное отличие наблюдателя (17) с линейной коррекцией с большими коэффициентами усиления (36) от наблюдателя (17) с sat-коррекцией (22) заключается в большом начальном всплеске ошибок наблюдения (первое слагаемое в (37)). Его величина стремительно растет по модулю при увеличении параметра $\mu > 1$ и размерности наблюдателя, и при этом порождает недопустимый начальный всплеск управляющего воздействия. В наблюдателе с sat-коррекцией (22) в переходном режиме корректирующие значения, ограниченные амплитудами (24), сдерживают выбросы ошибок наблюдения, что позволяет беспрепятственно использовать эти наблюдатели в системах с линейной обратной связью (21). При одинаковых эталонных полиномах (29) или (35) и прочих равных оба наблюдателя демонстрируют одинаковые установивши-

еся режимы. В следующем разделе эти выводы подтверждаются результатами численного моделирования.

3. Результаты численного моделирования

Моделирование проводилось в среде MATLAB-Simulink, для интегрирования применялся метод Эйлера с постоянным шагом 0,001. Для объекта управления (1) были приняты следующие начальные значения $x_1(0) = 1$ [рад], $x_{2,3,4} = 0$, параметры $a_{21} = 8,8$, $a_{22} = 29$, $a_{43} = 9,9$, $a_{44} = 2,5$, $b_4 = 13,3$, и внешние воздействия $f_1(t) = 0,4\sin(t)$, $f_2(t) = 0,4\cos(t)$, $g(t) = 0,02 + 0,2\sin(0,8t)$. Коэффициенты усиления линеаризующей обратной связи (7) приняты на основе эталонного полинома (8) вида $(\lambda + 5)^4 = \lambda^4 + 20\lambda^3 + 150\lambda^2 + 500\lambda + 625$. Предполагалось, что множитель управления $b = a_{21}b_4 = 8,8 \cdot 13,3 = 118,8$ точно не известен, в качестве номинального значения принят параметр $b_0 = 100 \neq b$, удовлетворяющий (5).

В эксперименте 1 моделировалась замкнутая система (1), (21) с наблюдателем (17) с кусочно-линейными корректирующими воздействиями с насыщением (22), амплитуды которых приняты на основе неравенств (24) в виде:

$$m_1 = 120, m_2 = 100, m_3 = 80, m_4 = 60. \quad (38)$$

С учетом (30), (34) для наблюдателя принят эталонный полином (29) в виде $(\lambda + 800)^4$ с параметрами:

$$\begin{aligned} p_1 &= 3200, p_2 = 3840000, \\ p_3 &= 2048000000, p_4 = 4,096E + 11. \end{aligned} \quad (39)$$

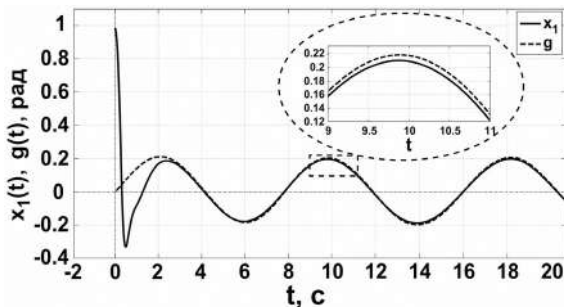


Рис. 1. Графики $x_1(t)$, $g(t)$

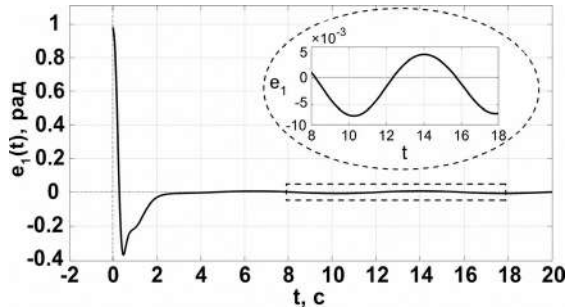


Рис. 2. График ошибки слежения $e_1(t)$

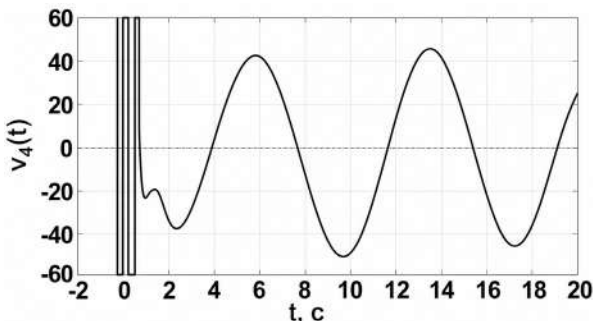


Рис. 3. Графики $v_4(t) \approx e_5(t)$

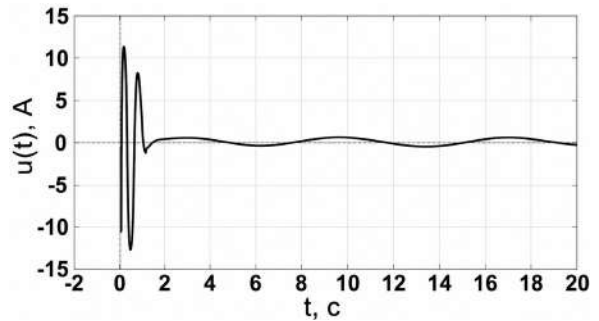


Рис. 4. График управления $u(t)$

При подстановке в формулы (33) значений (38) и (39) были получены следующие коэффициенты усиления sat-коррекции (22):

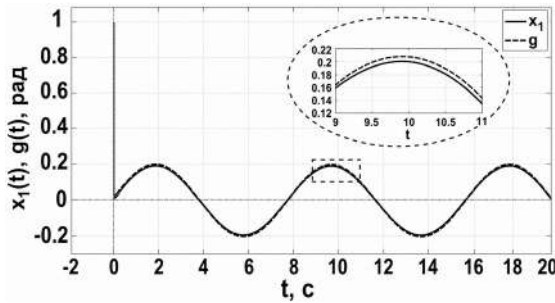
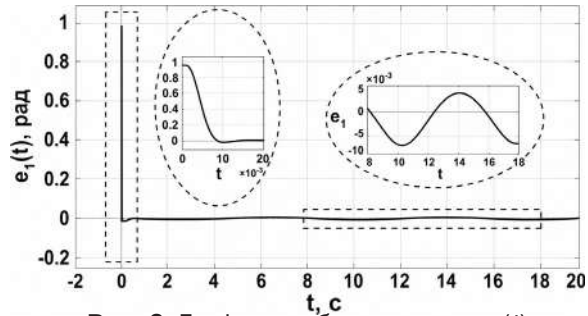
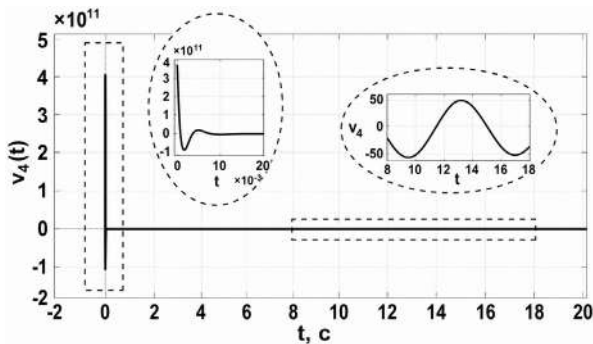
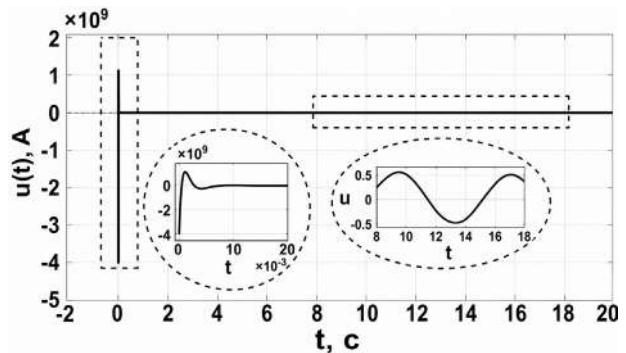
$$l_1 = 26,67, l_2 = 12, l_3 = 6,67, l_4 = 3,33.$$

На рис. 1 представлены графики регулируемой переменной – углового положения манипулятора $x_1(t)$ и задающего воздействия $g(t)$, на рис. 2 – график ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$; на рис. 3 – график корректирующего воздействия $v_4(t)$ (22), который восстанавливает обобщенное возмущение $e_5(t)$ (6); на рис. 4 – график управления $u(t)$ (21).

Из этих графиков видно, что переходный процесс ошибки слежения длится примерно 2,4 сек, в установившемся состоянии ошибка слежения не превышает 0,008 рад. Управляющее воздействие в переходном периоде находится в диапазоне $-13,5 \leq u(t) \leq 11$ А, $0 \leq t \leq 1,2$ сек.

В эксперименте 2 моделировалась замкнутая система (1), (21) с наблюдателем (17) с линейными корректирующими воздействиями (31), коэффициенты которых совпадают с коэффициентами эталонного полинома (39). На рис. 5–8 показаны графики тех же переменных, что и на рис. 1–4.

Из графиков видно, что переходный процесс ошибки слежения очень быстрый и длится примерно 0,014 сек, но в установившемся состоянии ошибка слежения, как и в эксперименте 1, не превышает 0,008 рад. Корректирующее воздействие $v_4(t)$ в начальный момент имеет всплески в диапазоне $-1,2 \times 10^{11} \leq v_4(t) \leq 4 \times 10^{11}$, которые порождают начальные всплески управляющего сигнала

Рис. 5. Графики $x_1(t)$, $g(t)$ Рис. 6. График ошибки слежения $e_1(t)$ Рис. 7. Графики $v_4(t) \approx e_5(t)$ Рис. 8. График управления $u(t)$

ла $-4 \times 10^9 \leq u(t) \leq 1,2 \times 10^9$ А, $0 \leq t \leq 0,01$ сек. В установившемся режиме в обоих экспериментах управление обрабатывает незатухающие обобщенные внешние воздействия и находится в диапазоне $-0,5 \leq u(t) \leq 0,55$ А.

Таким образом, результаты моделирования подтверждают эффективность разработанного подхода и преимущество наблюдателя с sat-коррекцией по сравнению с типовым линейным наблюдателем с большими коэффициентами усиления.

Заключение

Для реализации предложенного подхода к синтезу следящей системы требуется только априорное знание возможных диапазонов параметров объекта, внешних воздействий и их производных, которые зависят от условий эксплуатации. Если имеется система технического зрения, измеряющая непосредственно ошибку слежения, то в данном электромеханическом объекте можно отказаться от установки всех датчиков переменных состояния, в том числе, и от датчика углового положения манипулятора, так как вся необходимая информация для синтеза комбинированного управления предоставляется редуцированным наблюдателем смешанных переменных при обработке сигнала ошибки слежения, которая, по сути, сводится к его динамическому дифференцированию. При этом порядок замкнутой системы увеличивается только в два раза, допускаются переменные параметрические неопределен-

ности и несогласованные возмущения, что выгодно отличает данный подход от постановок и реализаций следящих систем в условиях неопределенности с использованием методов адаптивного управления.

Наблюдатели с ограниченными корректирующими воздействиями и, соответственно, с ограниченными оценочными сигналами, востребованы в практических приложениях. Предложенная упрощенная схема настройки коэффициентов усиления кусочно-линейных корректирующих воздействий наблюдателя четвертого порядка без ограничения общности может быть распространена на одноканальные и многоканальные системы любой размерности, приводимые к каноническому виду.

Литература

1. Khalil H.K. Nonlinear systems. 3rd ed. N.J.: Prentice Hall, 2002. 776 p.
2. Furtat I., Gushchin P. Output feedback control with disturbance compensation in nonlinear MIMO systems under measurement noises // Journal of Control and Decision. 2022. Vol. 9. No. 1. P. 35–44.
3. Карабутов Н.Н., Феклин В.Г. Адаптивная идентификация систем с распределенным лагом // Современная математика и ее приложения. 2015. № 95. С. 48–64.
4. Бусурин В.И., Чже Лю, Кудрявцев П.С. Управление бесконтактным профилометром при сканировании поверхностей сложного профиля //

- Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 23, №10. С. 529–535.
5. Пыркин А.А., Бобцов А.А., Нгуен Х. Т. Алгоритм адаптивного оценивания параметров для класса нелинейных нестационарных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 4. С. 266–275.
 6. Козачёк О.А., Бобцов А.А., Николаев Н.А. Адаптивный наблюдатель переменных состояния нелинейной нестационарной системы с неизвестными постоянными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 8. С. 627–636.
 7. Никифоров В.О., Герасимов Д.Н., Н. А. Дударенко Н.А. Адаптивная компенсация внешних возмущений в многоканальных системах при управлении по выходу // Автоматика и телемеханика. 2025. № 4. С. 3–21.
 8. Глущенко А.И., Ласточкин К.А. Обзор методов построения наблюдателей состояний для систем с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2026. № 2. С. 3–60.
 9. Краснов Д.В., Уткин А.В. Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // Управление большими системами. 2017. Вып. 69. С. 29–49.
 10. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных систем слежения // Автоматика и телемеханика. 2017. № 12. С. 26–53.
 11. Spong M. Modeling and control of elastic joint robots // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1987. Vol. 109. P. 310–319.
 12. Краснов Д.В., Антипов А.С. Синтез двухконтурного наблюдателя в задаче управления однозвенным манипулятором в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2021. №4. С. 27–39.
 13. Khalil H.K., Praly L. High-gain observers in nonlinear feedback control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2014. Vol. 24. No. 6. P. 993–1015.
 14. Wang H., Zhang Z., Tang X., Zhao Z., Yan Y. Continuous output feedback sliding mode control for underactuated flexible-joint robot // Journal of the Franklin Institute. 2022. Vol. 359. P. 7847–7865.
 15. Краснова С.А. Оценивание производных внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // Управление большими системами: сборник трудов. 2018. Вып. 76. С. 6–25.
 16. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.

Краснов Дмитрий Валентинович. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия. Научный сотрудник. Область научных интересов: синтез наблюдателей состояний и возмущений, системы слежения для электромеханических объектов управления в условиях неопределенности и неполных измерений. E-mail: dim93kr@mail.ru

Уткин Антон Викторович. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия. Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник. Область научных интересов: синтез наблюдателей состояний и возмущений, системы слежения для электромеханических, робототехнических и энергетических объектов управления в условиях неопределенности и неполных измерений. E-mail: utkin-av@rambler.ru (Ответственный за переписку).

Synthesis of Mixed Variable Observers in a Single-Link Manipulator Tracking System

D.V. Krasnov, A.V. Utkin

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. For a single-link manipulator with a sensorless drive, the synthesis of a tracking system under conditions of parametric and external unmatched disturbances is considered. Under the assumption of smooth external disturbances, the mathematical model of the plant is reduced to a canonical “input – output” form with respect to mixed variables, which are functions of state variables, external influences, and their derivatives. A linearization method via output feedback is used to synthesize the tracking system. A reduced observer is introduced into the feedback loop to estimate mixed variables and generalized disturbances, including a control signal with an undetermined multiplier. The main result is a developed simplified method for adjusting the observer with piecewise linear corrective actions with saturation based on a reference polynomial, the stability margin of which determines the estimation error. The results of numerical simulation are presented, demonstrating the advantages of the developed observer over a high-gain observer with linear correction without saturation.

Keywords: *Single-link manipulator; tracking, uncertain parameters, external unmatched disturbances, state and disturbance observer, nested saturators.*

DOI: 10.14357/20790279260209 **EDN:** XMBXVQ

References

1. Khalil H.K. Nonlinear Systems. 3rd ed. N.J.: Prentice Hall; 2002. 776 p.
2. Furtat I., Gushchin P. Output Feedback Control with Disturbance Compensation in Nonlinear MIMO Systems under Measurement Noises. *Journal of Control and Decision*. 2022; 9(1): 35–44.
3. Karabutov N.N., Feklin V.G. Adaptive identification of systems with distributed lags. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016; 216(5): 649–666.
4. Busurin V.I., Zhe L., Kudryavtsev P.S. Control of Contactless Profilometer for Scanning Surfaces of Complex Profile. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2022; 23(10): 529–535. (In Russ).
5. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Nguen K.T. Algorithm of adaptive estimation of parameters for a class of nonlinear non-stationary systems. *Journal of Instrument Engineering*. 2023; 66(4): 266–275. (In Russ).
6. Kozachek O.A., Bobtsov A.A., Nikolaev N.A. Adaptive observer of state variables of a nonlinear nonstationary system with unknown constant parameters. *Journal of Instrument Engineering*. 2023; 66(4): 627–636. (In Russ).
7. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N., Dudarenko N.A. Output adaptive compensation of external disturbances in MIMO systems. *Automation and Remote Control*. 2025; 86(4): 291–305.
8. Glushenko A.I., Lastochkin K.A. Overview on observer design principles for systems with unknown parameters. *Automation and Remote Control*. 2026; 87(2): 97–140.
9. Krasnov D.V., Utkin A.V. Synthesis of a Multifunctional Tracking System in Conditions of Uncertainty. *Automation and Remote Control*. 2019; 80(9): 1704–1716.
10. Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V. Block

- Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems. *Automation and Remote Control*. 2017; 78(12): 2120–2140.
11. Spong M. Modeling and control of elastic joint robots. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. 1987; 109: 310–319.
 12. Krasnov D.V., Antipov A.S. Designing a double-loop observer to control a single-link manipulator under uncertainty. *Control Sciences*. 2021; 4: 23–33.
 13. Khalil H.K., Praly L. High-gain observers in nonlinear feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2014; 24(6): 993–1015.
 14. Wang H., Zhang Z., Tang X., Zhao Z., Yan Y. Continuous output feedback sliding mode control for underactuated flexible-joint robot. *Journal of the Franklin Institute*. 2022; 359: 7847–7865.
 15. Krasnova S.A. Estimating the Derivatives of External Perturbations Based on Virtual Dynamic Models. *Automation and Remote Control*. 2020; 81(5): 897–910.
 16. Korovin S.K., Fomichev V.V. State Observers for Linear Systems with Uncertainty. Moscow: Phizmatlit; 2007. 224 p. (In Russ).

Krasnov Dmitry V. Researcher, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya street, Moscow 117997, Russia. E-mail: dim93kr@mail.ru

Utkin Anton V. Leading Researcher, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya street, Moscow 117997, Russia. E-mail: utkin-av@rambler.ru