Динамика макросистем

О хаотической мультистабильности обобщенного уравнения Курамото-Цузуки

Н.А. Магницкий

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе проведен аналитический и численный анализ обобщенного уравнения Курамото-Цузуки в частных производных. Показано, что рассмотренное уравнение с фиксированными параметрами имеет бесконечное число устойчивых периодических и хаотических «скрытых» аттракторов. Доказано, что все хаотические «скрытые» аттракторы уравнения являются сложными сингулярными аттракторами в смысле теории ФШМ, а само уравнение обладает свойством хаотической мультистабильности.

Ключевые слова: *обобщенное уравнение Курамото-Цузуки, динамический хаос, скрытый аттрактор, теория ФШМ, хаотическая мультистабильность.*

DOI: 10.14357/20790279260301 **EDN:** UVRAPE

Введение

Уравнение Курамото-Цузуки или зависящее от времени уравнение Гинзбурга-Ландау

$$W_t = W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)W|W|^2 \quad (1)$$

играет важную роль в изучении и понимании процессов, происходящих в нелинейных диссипативных средах диффузионного типа. Оно описывает решения системы уравнений реакция-диффузия, рождающиеся в окрестности термодинамической ветви в результате ее бифуркации. Уравнение (1) подробно рассматривалось в работах А.Самарского, С.Курдюмова и их учеников [1,2]. Были установлены области изменения параметров c_1 и c_2, в которых вторая краевая задача для уравнения (1) на отрезке [0, R] имеет нестационарные, непериодические, неоднородные по пространству решения – пространственно-временной или диффузионный хаос. Идея авторов работ [1,2] объяснить природу таких нерегулярных решений уравнения (1) состояла в использовании галеркинских маломодовых аппроксимаций для сведения уравнения (1) к более простой трехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим анализом хаотической динамики полученной таким образом трехмерной системы. Однако, как следует из работ автора [3-5], переход к динамическому хаосу в трехмерных системах ОДУ может осуществляться исключительно каскадами бифуркаций циклов, но не торов. Каскады бифуркаций различных двумерных торов в уравнении (1) в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием ФШМ (Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого) были найдены автором в работах [4,5]. Там же показано, что уравнение (1) может быть сведено автомодельной заменой переменных $\xi = x - ct$ к четырехмерной нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающей каскадами бифуркаций двумерных торов по скрытому параметру c, сходящихся к особой двумерной гомоклинической структуре, являющейся декартовым произведением особого предельного цикла на петлю сепаратри-

* Работа поддержана Российским Научным Фондом (грант № 26-11-00027).

сы особой точки. При этом четырехмерная система имеет при различных значениях скрытого параметра c бесконечное число субгармонических и гомоклинических тороидальных сингулярных аттракторов, порождающих пространственно-временной хаос в исходном уравнении (1) с частными производными. То есть, уравнение (1) обладает свойством хаотической мультистабильности. Решения четырехмерной системы, задающие движение по особой гомоклинической структуре, стремятся к периодическому особому решению при $\xi =\to \pm\infty$.

В настоящей работе доказывается хаотическая мультистабильность обобщенного уравнения Курамото-Цузуки:

$$W_t = (a_1 + ia_2)W - dW_x + \\ +(b_1 + ib_2)W_{xx} - (c_1 + ic_2)W|W|^2, \\ W(x,t) = u(x,t) + iv(x,t), \\ -\infty < x < \infty, \qquad 0 \le t < \infty. \qquad (2)$$

Уравнение (2) предложено в работе [6] для описания так называемых открытых течений, примером которых могут служить течения в трубах, каналах и др. В настоящей работе доказано, что уравнение (2) имеет каскад бифуркаций по скрытому параметру c, не входящему явно в уравнение и являющемуся величиной скорости распространения возмущений вдоль пространственной оси x. Это означает, что обобщенное уравнение Курамото-Цузуки с фиксированными параметрами может иметь бесконечное число различных устойчивых автоволновых периодических решений, бегущих вдоль пространственной оси с различными скоростями, а также бесконечное число различных режимов пространственно-временного хаоса.

1. Сведение обобщенного уравнения Курамото-Цузуки к системе ОДУ

Запишем задачу Коши на прямой для обобщенного уравнения Курамото-Цузуки (2) с комплекснозначной функцией $W(x,t) = u(x,t) + iv(x,t)$ в виде системы двух параболических уравнений с вещественными переменнымии $u(x,t)$ и $v(x,t)$:

$$u_t = a_1u - a_2v - du_x + b_1u_{xx} - \\ - b_2v_{xx} - (c_1u - c_2v)(u^2 + v^2), \\ v_t = a_2u + a_1v - dv_x + b_2u_{xx} + \\ + b_1v_{xx} - (c_2u + c_1v)(u^2 + v^2) \\ -\infty < x < \infty, \qquad u(x,0) = u_0(x), \\ v(x,0) = v_0(x), \qquad 0 \le t < \infty. \qquad (3)$$

Решение системы уравнений (3) будем искать в виде бегущей волны $u(x,t) = u(x - ct) = u(\xi)$, $v(x,t) = v(x - ct) = v(\xi)$. Запишем систему уравнений (3) в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменной $\xi = x - ct$:

$$-cu' = a_1u - a_2v - du' + b_1u'' - \\ - b_2v'' - (c_1u - c_2v)(u^2 + v^2) \\ -cv' = a_2u + a_1v - dv' + b_2u'' + \\ + b_1v'' - (c_2u + c_1v)(u^2 + v^2), \qquad (4)$$

где производные берутся по переменной ξ. Разрешая теперь полученную систему уравнений относительно вторых производных u'' и v'' и переходя к фазовым переменным $u,\ u' = z,\ v,\ v' = r$ получим четырехмерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u' = z, \\ z' = (-(c-d)b_1z - (c-d)b_2r - (a_1b_1 + a_2b_2)u - \\ -(a_1b_2 - a_2b_1)v + ((c_1b_1 + c_2b_2)u + \\ +(c_1b_2 - c_2b_1)v)(u^2 + v^2))/(b_1^2 + b_2^2), \\ v' = r, \\ r' = ((c-d)b_2z - (c-d)b_1r + (a_1b_2 - a_2b_1)u - \\ -(a_2b_2 + a_1b_1)v + ((c_1b_2 - c_2b_1)u - \\ -(c_2b_2 + c_1b_1)v)(u^2 + v^2))/(b_1^2 + b_2^2). \qquad (5)$$

Наибольший интерес представляет наличие в системе (5) каскадов бифуркаций по скрытому параметру c, не входящему явно в систему уравнений (2),(3) и являющемуся величиной скорости распространения возмущений вдоль пространственной оси x. Этот случай означает, что система уравнений автоколебательной среды типа обобщенного уравнения Курамото-Цузуки (Гинзбурга-Ландау) с фиксированными параметрами $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1, c_2, d$ может иметь бесконечное число различных скрытых устойчивых автоволновых решений $W_c(x,t) = W_c(x - ct)$ произвольного периода, бегущих вдоль пространственной оси с различными скоростями, а также бесконечное число различных режимов пространственно-временного хаоса, отвечающих различным начальным условиям $W_c(x,0) = W_c(x)$. В этом случае можно говорить о том, что обобщенное уравнение Курамото-Цузуки (2) обладает свойством хаотической мультистабильности.

2. Аналитическое исследование

Найдем дивергенцию правой части $\boldsymbol{F}(u,z,v,r)$ системы (5): $div\boldsymbol{F} = -2(c-d)b_1/(b_1^2 + b_2^2)$. Следовательно, система (5) диссипативна всюду в области $(c-d)b_1 > 0$, то есть по крайней мере

в области $c > d$ при положительных значениях параметра b_1. Система (5) имеет особую точку O(0,0,0,0). Положим $D = (b_1^2 + b_2^2)$ и вычислим матрицу линеаризации системы (5) в особой точке O:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(a_1b_1 + a_2b_2)/D & -(c-d)b_1/D & -(a_1b_2 - a_2b_1)/D & -(c-d)b_2/D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)/D & (c-d)b_2/D & -(a_2b_2 + a_1b_1)/D & -(c-d)b_1/D \end{pmatrix}.$$

Вычисляя характеристический многочлен в особой точке O, найдем, что

$$\det(A - \lambda I) = \left(\lambda^2 + (c-d)b_1\lambda + (a_1b_1 + a_2b_2)\right)^2 + \\ +((c-d)b_2\lambda + (a_1b_2 - a_2b_1))^2 = \\ = \lambda^2 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4,$$

где

$$p_1 = \frac{2(c-d)b_1}{D}; \quad p_2 = \frac{2(a_1b_1 + a_2b_2)}{D} + \\ +\left((c-d)b_1/D\right)^2 + \left((c-d)b_2/D\right)^2,$$

$$p_3 = 2(c-d)(b_1(a_1b_1 + a_2b_2) + b_2(a_1b_2 - a_2b_1))/D^2,$$

$$p_4 = ((a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2)/D^2.$$

Будем считать коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 и выражения $(a_1b_1 + a_2b_2)$ и $(a_1b_2 - a_2b_1)$ положительными. Тогда все коэффициенты характеристического полинома также положительны при $c > d$, что является необходимым условием устойчивости полинома. Рассмотрим достаточное условие устойчивости $p_1p_2 > p_3$. Оно выполнено, если

$$b_1\left(2(a_1b_1 + a_2b_2) + (c-d)^2({b_1}^2 + {b_2}^2)\right) > \\ > (b_1(a_1b_1 + a_2b_2) + b_2(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Ясно, что условие выполнено при достаточно больших значениях $c > d$. Но, если

$$b_1(a_1b_1 + a_2b_2) < b_2(a_1b_2 - a_2b_1), \qquad (6)$$

то при уменьшении значений параметра c условие устойчивости характеристического полинома нарушается, и особая точка O становится неустойчивой. Тоже самое имеет место и для второго достаточного условия устойчивости характеристического полинома $p_1(p_2p_3 - p_1p_4) > {p_3}^2$. Найдем в явном виде амплитуду и период предельного цикла, рождающегося из особой точки O при потере ее устойчивости. Положим $u = \mu\cos(\omega\xi)$, $v = \mu\sin(\omega\xi)$. Подставляя эти выражения в систему уравнений (5) и приравнивания коэффициенты при $\cos(\omega\xi)$ и $\sin(\omega\xi)$, найдем, что

$$\omega^2\left({b_1}^2 + {b_2}^2\right) - \omega(c-d)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2) + \\ +(c_1b_1 + c_2b_2)\mu^2 = 0,$$

$$\omega(c-d)b_1 - (a_1b_2 - a_2b_1) + (c_1b_2 - c_2b_1)\mu^2 = 0.$$

Выражая μ^2 из второго уравнения и подставляя его в первое, получим квадратное уравнение для определения частоты ω периодических колебаний. Тогда из второго уравнения найдем амплитуду этих колебаний. Наибольший интерес представляют, конечно, дальнейшие бифуркации родившегося из особой точки предельного цикла. Анализ этих бифуркаций проведем численными методами.

3. Численный анализ

Выберем следующие значения параметров уравнения (2),(3): $a_1 = 2.5$, $a_2 = 0.2$, $b_1 = 0.5$, $b_2 = 2$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = -0.1$, $d = 0.1$. При этом условие (6) выполнено. Численные расчеты показывают, что при $4.55 < c < 10$ особая точка O системы (5) асимптотически устойчива, а при $c \approx 4.55$ из нее в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл. Цикл остается устойчивым до $c \approx 2.96$, при котором из него в результате повторной бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый двухмерный тор.

Дальнейшее усложнение динамики решений системы ОДУ (5) при уменьшении значений бифуркационного параметра c происходит, как и во многих других нелинейных системах дифференциальных уравнений, через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского. Так, устойчивый двумерный тор периода два субгармонического каскада T_2 наблюдается при $c = 2.2$, тор периода четыре T_4 – при $c = 2.14$, тор периода пять T_5 – при $c = 2.0966$. Проекции устойчивого двумерного тора T_4 периода четыре системы (5) и его сечения Пуанкаре представлены на рис. 1.

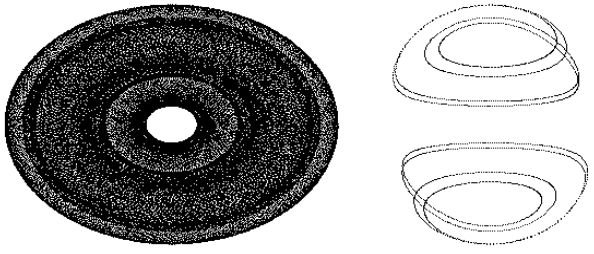

Рис.1. Проекция на плоскость (v, u) устойчивого двумерного тора T_4 периода 4 системы (5) и проекция на плоскость (v, u') его сечения Пуанкаре плоскостью $v = 0$ при c = 2.14

На рис. 2 представлены проекции сечений Пуанкаре двумерного тора T_5 периода пять субгармонического каскада Шарковского, сложного сингулярного тороидального хаотического аттрактора, лежащего в окрестности тора T_5, и двумерно-

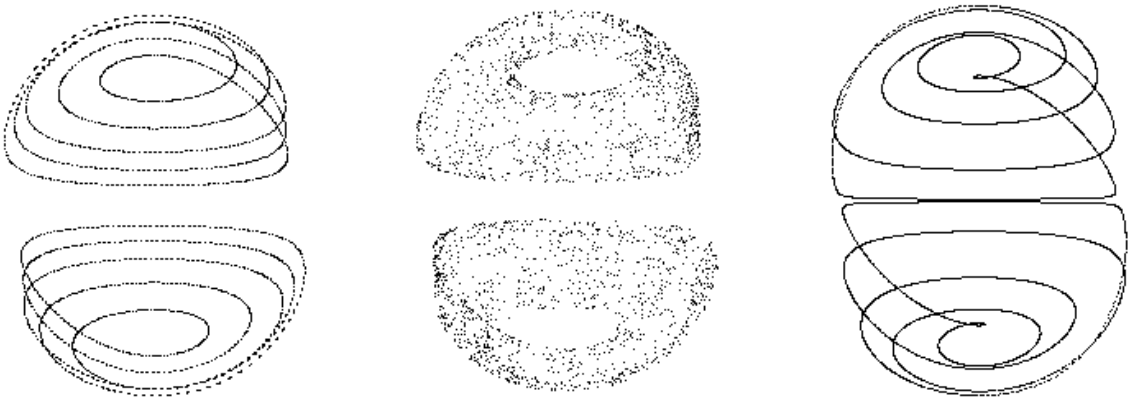

Рис. 2. Проекции на плоскость (u, u') сечений Пуанкаре плоскостью $v = 0$ двумерного тора T_5 периода пять при $c = 2.0966$ сингулярного тороидального хаотического аттрактора при $c = 2.09$ и двумерного тора периода четыре гомоклинического каскада бифуркаций при $c = 1.98$

го тора периода четыре гомоклинического каскада двумерных торов, следующего за субгармоническим каскадом Шарковского,

Каждому устойчивому периодическому и хаотическому решению $(u(\xi), v(\xi))$ системы ОДУ (5) соответствует бегущая со скоростью c волна $u(x,t) = u(x - ct) = u(\xi)$, $v(x,t) = v(x - ct) = v(\xi)$, являющаяся решением исходного обобщенного уравнения (2) Кураиого-Цузуки с начальным условием $u(x,0) = u(x)$, $v(x,0) = v(x)$. А так как бифуркационный параметр c, являющийся скоростью волны, не входит явно в обобщенное уравнение Курамото-Цузуки (2), то все устойчивые периодические и хаотические волновые аттракторы уравнения (2) всех трех каскадов бифуркаций в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого (ФШМ), являются скрытыми аттракторами. Следовательно, исходное уравнение Курамото-Цузуки (2) имеет бесконечное число различных скрытых устойчивых периодических и хаотических аттракторов. То есть, система (2) обладает свойством *хаотической мультистабильности.* На рис.3 представлены периодические и хаотический волновые аттракторы уравнения (2), соответствующие решениям системы ОДУ (5), изображенным на рис. 2.

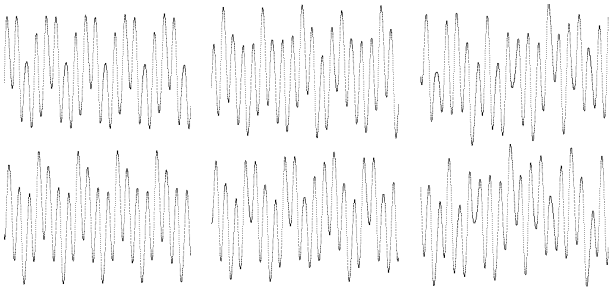

Рис. 3. Волновые решения (u, v) уравнения Курамото-Цузуки (2)-(3), соответствующие решениям системы ОДУ (5), изображенным на рис.2 (сверху $u(x)$, снизу $v(x)$)

Заключение

В работе проведено аналитическое и численное исследование обобщенного уравнения Курамото-Цузуки в частных производных. Показано, что рассмотренное уравнение с фиксированными параметрами имеет бесконечное число устойчивых периодических и хаотических «скрытых» аттракторов. Переход к хаосу в системе происходит, как и в любых других нелинейных хаотических системах дифференциальных уравнений, в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием ФШМ. Причем бифуркационным параметром является скрытый параметр системы – скорость распространения волновых решений уравнения. Показано, что все хаотические «скрытые» аттракторы уравнения являются сложными сингулярными аттракторами в смысле теории ФШМ, а само уравнение обладает свойством хаотической мультистабильности. Также как и другие нелинейные хаотически мультистабильные системы уравнений с частными производными, обладающие каскадами бифуркаций ФШМ по скрытым параметрам [7-9].

Литература

1. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Самарский А.А. Двухкомпонентные дина-

мические системы в окрестности точки бифуркации // Мат. моделирование. М.: Наука. 1986. С. 7-59.
2. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука? 1992. 541 с.
3. Magnitskii N.A. Universal Bifurcation Chaos Theory and Its New Applications // Mathematics. 2023. Vol.11. 2536. P.1-20. https://doi.org/10.3390/math11112536
4. Магницкий Н.А. Теория динамического хаоса. М.: Ленанд, 2011. 320 с.
5. Magnitskii N.A. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos // Chaos Theory. Rijeka: InTech, 2018. P. 197-215.
6. Deissler R. S. Turbulent bursts, spots and slugs in a generalized Ginzburg-landau equation // Physics Letters A. 1987. Vol. 120. 7. P.334-340.
7. Magnitskii N.A. Traveling waves and space-time chaos in the Kuramoto–Sivashinsky equation // Differential Equations. 2018. Vol. 54. No. 9. P. 1266-1270.
8. Magnitskii N.A. Traveling Waves and Space-Time Chaos in the Kawahara Equation // JAND. 2025. Vol. 14. No. 2. P. 247-252.
9. Magnitskii N.A. Wave Propagation and Chaotic Behavior in Conservative and Dissipative Sawada–Kotera Models // Fluid Dynamics & Materials Processing. 2025. Vol. 21. No.7. P. 1529-1544.

Магницкий Николай Александрович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник. Доктор физико-математических наук, профессор. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети, интегральные уравнения, математическое моделирование. E-mail: nikmagn@gmail.com

On the chaotic multistability of the generalized Kuramoto-Tsuzuki equation

N.A. Magnitskii

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, e-mail: nikmagn@gmail.com

Abstract. This paper presents an analytical and numerical analysis of the generalized Kuramoto-Tsuzuki partial differential equation. It is shown that this equation with fixed parameters has an infinite number of stable periodic and chaotic "hidden" attractors. It is proven that all chaotic "hidden" attractors of the equation are complex singular attractors in the sense of FShM theory, and the equation itself exhibits the property of chaotic multistability..

Keywords: *Generalized Kuramoto-Tsuzuki equation, dynamic chaos, hidden attractor, FShM theory, chaotic multistability.*

DOI: 10.14357/20790279260301 **EDN:** UVRAPE

References

1. Akhromeyeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskiy G.G. Samarskiy A.A. Dvukhkomponentnyye dinamicheskiye sistemy v okrestnosti tochki bifurkatsii. // Mat. modelirovaniye. M.: Nauka. 1986. P. 7-59. (in Russ).
2. Ahromeeva T.S., Kurdumov S.P., Malineckiy G.G., Samarskiy A.A. *Nestacionarnye struktury i diffuzionnyj haos.* Moscow: Nauka, 1992. 541 p. (in Russ).
3. Magnitskii N.A. Universal Bifurcation Chaos Theory and Its New Applications. *Mathematics*. 2023; 11 (11). 2536: 1-20. https://doi.org/10.3390/math11112536
4. Magnitskiy N.A. Teoriya dinamicheskogo khaosa. Moscow: Lenand? 2011. 320 p. (in Russ).
5. Magnitskii N.A. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. // Chaos Theory. Rijeka: InTech, 2018. P. 197-215.
6. Deissler R. S. Turbulent bursts, spots and slugs in a generalized Ginzburg-landau equation. *Physics Letters A.* 1987; 120 (7): 334-340.
7. Magnitskii N.A. Traveling waves and space-time chaos in the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Differential Equations.* 2018; 54 (9): 1266-1270.
8. Magnitskii N.A. Traveling Waves and Space-Time Chaos in the Kawahara Equation. *JAND*. 2025; 14 (2): 247-252.
9. Magnitskii N.A. Wave Propagation and Chaotic Behavior in Conservative and Dissipative Sawada–Kotera Models. *Fluid Dynamics & Materials Processing*. 2025;21(7):1529-1544.

Magnitskii Nikolay A. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova Str., Moscow, 119333. Number of publications: more than 250. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks, integral equations, mathematical modeling, e-mail: nikmagn@gmail.com