

Кривая Безье как функция активации искусственных нейронных сетей*

М.В. ХАЧУМОВ^{I,II,III}, В.М. ХАЧУМОВ^{I,II,III}

^I Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва, Россия

^{II} Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, г. Москва,
Россия

^{III} МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Предлагается применять кривую Безье как функцию активации искусственных нейронных сетей. Рассмотрен вариант модифицированной интерполирующей кривой Безье как базисной функции. Установлена связь между параметрами сигмоидальной функции активации и кривой. Даются основные требования к функции активации и показано, что кривая Безье им соответствует. Изложены перспективы применения кривой в искусственных нейронных сетях.

Ключевые слова: кривая Безье, требования, функция активации, сплайн, искусственная нейронная сеть, нейрон, s-парабола.

DOI: 10.14357/20790279260302 **EDN:** XTLILM

Введение

Рациональному представлению функции активации искусственных нейронных сетей (ИНС) посвящено достаточно большое количество исследований. Например, отметим аппроксимацию в виде биполярного морфологического нейрона [1] и подход, связанный с параболической s-образной реализацией, названный s-параболой [2]. Как отмечают исследователи, использование ветвей параболы расширяет логические возможности отдельного нейрона и позволяет реализовывать операции типа XOR с использованием меньшего числа нейронов.

S-парабола не конкурирует с функциями глубокого обучения, такими как Swish или Mish, обеспечивающими «гладкую оптимизацию», а предлагает компромисс между вычислительной простотой и точностью [3]. К основным преимуществам s-параболы относится ее вычислительная простота, что, согласно результатам экспериментов, может ускорять обучение и повышать скорость работы нейросетей в прикладных задачах. Она особенно эффективна в задачах прогнозирования временных рядов и классификации, где важна стабильность состояний нейросети [4]. Функция

представляет собой специализированное, аппаратно-эффективное решение для систем с малыми вычислительными ресурсами там, где важна фиксированная форма нелинейности, симметрия и интерпретируемая граница решения. Тем не менее, s-парабола обладает и определенными недостатками. Анализ возможностей активационной функции «s-парабола» показывает, что она не является универсальной заменой ReLU, GELU или других стандартных функций, применяемых в современных глубоких искусственных нейронных сетях.

В современной литературе наметилась тенденция к построению и применению параболических сплайнов. Так, в работе [5] рассмотрено применение параболического интегро-дифференциального (ИД) сплайна в качестве функции активации в полносвязной ИНС. Показано, что предлагаемый метод позволяет заменять стандартные функции активации на параболические ИД-сплайны в сетях типа ResNet. В процессе обучения функция активации меняется так, чтобы минимизировать функцию потерь. Это позволяет эффективно использовать сети более простой архитектуры (с меньшим числом слоев и нейронов), сокращает время обучения и повышает скорость работы нейросети. Эксперименты показали, что использование ИД-сплайновых функций активации может повышать точность классификации по

* Исследование выполнено за счет Гранта Российского научного фонда 25-21-00222 «Модели быстрых искусственных нейронов и нейронных сетей для бортовых вычислительных комплексов малых беспилотных летательных аппаратов».

сравнению с некоторыми другими функциями (например, ReLU).

Сплайн – гладкая кривая, кусочно-полиномиальная функция, которая на разных отрезках задается различными полиномами. Каждый сплайн аппроксимируется с помощью заданного количества точек. Сплайны непрерывны и дифференцируемы, а значит, такую архитектуру можно обучать с помощью широко распространенного метода обратного распространения ошибки. Перспективным направлением служит применение сплайнов в составе ИНС КАН (Колмогоров-Арнольд) [6]. Альтернативными вариантами могут служить представления функции активации в виде сплайнов Эрмита и Безье, обеспечивающих единое математическое описание.

В настоящей работе основной упор делается на применение сплайна Безье как функции активации, моделирующей s-образную функцию.

1. Сплайн Безье как функция активации

Сплайн позволяет создавать плавные кривые, широко применяемые в задачах машинной графики, путем соединения ряда контрольных точек. Она представляет собой кусочно-полиномиальную функцию, где на разных отрезках задается различными полиномами. Сплайны непрерывны и дифференцируемы, что важно для машинного обучения нейронных сетей с использованием метода обратного распространения ошибки. Они используются в качестве функций активации в ИНС, например, типа Kolmogorov–Arnold Networks (KAN). В KAN обучаемые функции активации размещаются на ребрах сети, а не в нейронах, как в традиционных многослойных персептронах (Multi-Layer Perceptron - MLP). MLP – это класс ИНС прямого распространения, состоящий как минимум из трех слоев узлов: входного, скрытого и выходного. Эта архитектура позволяет моделировать сложные нелинейные зависимости и решать задачи классификации, регрессии и распознавания образов. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий непосредственно провести четырехточечную кривую Безье через заранее выбранные точки.

2. Четырехточечная кривая Безье для аппроксимации функции активации

Рассмотрим сплайны на основе кривых Безье [7]. Кривая Безье является удобным и широко распространенным инструментом для проведения гладких кривых. Обобщением кривой Безье является В-сплайн (Basis Spline), который позволяет

использовать больше контрольных точек и локально управлять формой кривой. Кривая Безье обладает той особенностью, что ее форма полностью определяется многоугольником, построенным на множестве заданных точек, причем она непосредственно проходит только через первую и конечную точки. Многоугольник единственным образом задает форму кривой, которой принадлежат первая и последняя вершины, в то время как другие вершины характеризуют производные, порядок и вид кривой. Данный метод позволяет изменять форму кривой и ее порядок за счет изменения числа точек до тех пор, пока не будет достигнут желаемый образ.

Математически кривая Безье описывается полиномиальной функцией:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n p_i j_{n,i}(t),$$

где $j_{n,i}(t)$ – базисная функция вида:

$$j_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Здесь $t = (0, \dots, 1)$ – параметр, i – номер точки, причем $i = 0, \dots, n$. Таким образом, кривая Безье определяется $(n+1)$ точками многоугольника.

Для точного прохождения четырех точечной кривой Безье через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) необходимо заменить точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) на точки (x_1^*, y_1^*) , (x_2^*, y_2^*) . Кривая Безье описывается в этом случае уравнениями:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(1-t)^3 + x_1^* 3t(1-t)^2 + x_2^* 3t^2(1-t) + x_3 t^3, \\ y(t) &= y_0(1-t)^3 + y_1^* 3t(1-t)^2 + y_2^* 3t^2(1-t) + y_3 t^3. \end{aligned}$$

Пусть при $t=t_1$ имеет место $x(t_1)=x_1$, $y(t_1)=y_1$ а при $t=t_2$ $x(t_2)=x_2$, $y(t_2)=y_2$. Отсюда следует:

$$x_1^* = \frac{x_1 - x_0(1-t_1)^3 - x_3 t_1^3}{3t_1(1-t_1)^2} - \frac{x_2^* t_1}{1-t_1}, \quad x_2^* = \frac{A_x}{B},$$

где

$$A_x = x_2 - x_0(1-t_2)^3 - \frac{(x_1 - x_0(1-t_1)^3 - x_3 t_1^3)t_2(1-t_2)^2}{t_1(1-t_1)^2} - x_3 t_2^3,$$

$$B = 3t_2^2(1-t_2) - \frac{3t_1 t_2(1-t_2)^2}{1-t_1}.$$

Расчетные формулы для величин y_1^* , y_2^* аналогичны. Для определения значений t_1, t_2 воспользуемся следующим приближенным методом. В качестве промежуточного параметра будем использовать длину вдоль ломаной, образуемой отрезками, соединяющими последовательно точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) в порядке их нумерации. Положим $D=d_1+d_2+d_3$, где d_i , $i=(1,2,3)$ – рас-

стояние между точками с координатами (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) . Тогда приближенно можно записать:

$$t_1 = d_1 / D, \quad t_2 = (d_1 + d_2) / D.$$

Таким образом, все параметры, необходимые для расчета $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)$, оказываются определенными. Будем приближать функцию активации к сигмоиду четырехточечной кривой Безье.

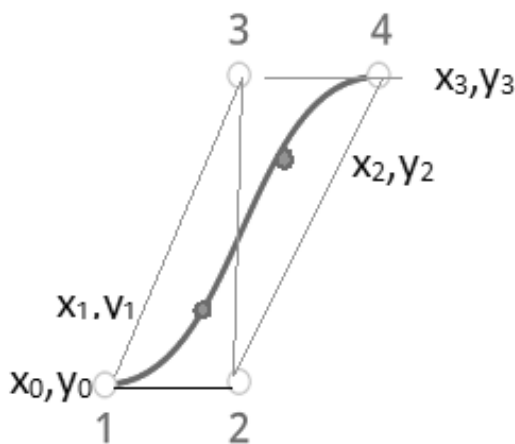


Рис. 1. Узлы кривой Безье для s-образной функции активации

Кривая всегда находится внутри выпуклой оболочки, образованной опорными точками. Расстановка узлов представлена на рис. 1. Точки по порядку соединяются отрезками 1→2, 2→3, 3→4. Развертывая t на отрезке от 0 до 1 с заданным шагом получим искомую кривую. Задача заключается в определении координат двух внутренних точек функции активации, через которые точно пройдет сплайн.

3. Расчет взаимосвязи основных параметров кривой и s-образной функции активации

Будем применять ИНС прямого распространения для задачи прогнозирования временного ряда. Пусть задан временной ряд в виде последовательности $n+1$ отсчетов $p(0), p(1), \dots, p(n)$ некоторой функции $p(x)$. Значения $p(n+1), \dots, p(n+m)$ называются прогнозными. Задача состоит в построении функции $F(t)$, экстраполирующей $p(x)$ на интервале $[(n+1), \dots, (n+m)]$.

Для прогнозирования будем применять ИНС прямого распространения. Обычно достаточно иметь два слоя с одним скрытым и необходимым количеством нейронов в нем

Установим связь между параметрами

$$s(x, w) = \sum_{i=1}^n x_i w_i \text{ и } t \text{ функции активации. Выход}$$

ИНС: $y = F(x(t), y(t))$. Положим, что известны границы значений функций $s(x, w)$ как $(s_{\min}, s_{\max})$. Допустим, что связь между параметрами линейная: $t = ks(x, w) + b$. После преобразований

$$\text{получим: } t = \frac{s(x, w) - s(x, w)_{\min}}{s(x, w)_{\max} - s(x, w)_{\min}}. \quad \text{Таким}$$

образом установлена связь между параметрами.

К функциям активации предъявляются требования показанные в табл. 1 [8].

Из уравнений и таблицы функции видно, что кривая дважды дифференцируема, монотонна и симметрична относительно начала координат, она может быть ограничена, что отвечает требованиям, предъявляемым к функциям активации. Это позволяет считать кривую Безье как подходящую на предмет функции активации.

Заключение

Использование сплайнов, в том числе кривой Безье, в качестве функций активации представляет собой перспективное направление в развитии нейронных сетей, позволяющее повысить точность моделей и упростить их архитектуру при определенных условиях. Кривая отвечает всем требованиям, предъявляемым к функциям активации. Ее применение в качестве функции активации позволяет гибко изменять форму, обеспечивает непрерывность и плавность, позволяет оптимизировать работу ИНС с обучаемыми параметрами функций активации. Более сложная формула реализации по сравнению с некоторыми другими функциями активации, в том числе семейства s-парабола, может увеличивать время настройки и вычисления, но позволяет плавно добиваться необходимой точности результата.

Табл. 1

Свойства функций активации

Функция	Нелинейность	Монотонность	Дифференцируемость	Ограниченность
Сигмоид	Да	Да	Да	Да $([0, 1])$
s-парабола	Да	Да	Да	Нет
Кривая Безье	Да	Да	Да	Да
Tanh	Да	Да	Да	Да $([-1, 1])$
ReLU	Да	Да	Частично	Нет

Литература

1. Limonova E. E. Fast and gate-efficient approximated activations for bipolar morphological neural networks // Информационные технологии и вычислительные системы, 2022. № 2. С. 310.
2. Хачумов М.В., Емельянова Ю.Г. Много-слойные искусственные нейронные сети с функцией активации типа s-парабола и их приложения // Искусственный интеллект и принятие решений. 2024. №3. С.42-53. [https://doi: 10.14357/20718594240304](https://doi.org/10.14357/20718594240304).
3. Dubey S. R., Singh S. K., Chaudhuri B. B. Activation Functions in Deep Learning: A Comprehensive Survey and Benchmark // Neurocomputing. 2022. Vol. 503. P. 1–18.
4. Хачумов М.В., Емельянова Ю.Г., Астраханцева А.А. Архитектура гибридной искусственной нейронной сети и ее применение в задачах распознавания образов // Искусственный интеллект и принятие решений. 2026. №1. С.68-75. [https://doi:10.14357/20718594260105](https://doi.org/10.14357/20718594260105).
5. Бирюкова Т.К. Построение нейронных сетей различных типов с использованием параболических интегро-дифференциальных сплайнов как функций активации // Системы высокой доступности. 2020. Т. 16. № 4. С. 40–49. [https://doi: 10.18127/j20729472-202004-03](https://doi.org/10.18127/j20729472-202004-03)
6. Разбор статьи про KAN – принципиально новую архитектуру нейросетей. <https://datasecrets.ru/articles/9>.
7. Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений. М.: Радио и связь, 1986. 395 с.
8. Нейросетевые технологии искусственного интеллекта. <https://intuit.ru/studies/courses/3521/763/lecture/32557?page=6&ysclid=mpxda4qh3877072367>.

Хачумов Михаил Вячеславович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Ведущий научный сотрудник. Кандидат физико-математических наук, доцент. Область научных интересов: искусственный интеллект, вычислительная математика, информационные технологии. E-mail: kmike@inbox.ru

Хачумов Вячеслав Михайлович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник. Доктор технических наук, профессор. Область научных интересов: искусственный интеллект, вычислительная математика, информационные технологии. E-mail: vmh48@mail.ru (Ответственный за переписку).

Bezier curve as an activation function of artificial neural networks

M.V.Khachumov^{I,II,III}, V.M.Khachumov^{I,II,III}

^I Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^{II} Peoples’ Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia

^{III} MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Abstract. It is proposed to use the Bezier curve as an activation function of artificial neural networks. A variant of the modified Bezier interpolating curve as a basis function is considered. A relationship has been established between the parameters of the sigmoidal activation function and the curve. The basic requirements for the activation function are given and it is shown that the Bezier curve corresponds to them. The prospects of using the curve in artificial neural networks are outlined.

Keywords: *Bezier curve, requirements, activation function, spline, artificial neural network, neuron, s-parabola.*

DOI: 10.14357/20790279260302 **EDN:** XTLILM

References

1. Limonova E.E. Fast and gate-efficient approximated activations for bipolar morphological neural networks // Information technologies and computing systems. 2022;2:310.
2. Khachumov M.V., Yemelyanova Yu.G. Multilayer artificial neural networks with an s-parabola activation function and their applications // Artificial intelligence and decision-making. 2024;3:C.42-53. [https://doi: 10.14357/20718594240304](https://doi.org/10.14357/20718594240304).
3. Dubey S.R., Singh S.K., Chaudhuri B. B. Activation Functions in Deep Learning: A Comprehensive Survey and Benchmark // Neurocomputing. 2022;503:1–18.
4. Khachumov M.V., Yemelyanova Yu.G., Astrakhantseva A.A. Architecture of a hybrid artificial neural network and its application in pattern recognition tasks // Artificial intelligence and decision-making. 2026;1:68-75. [https://doi:10.14357/20718594260105](https://doi.org/10.14357/20718594260105).
5. Biryukova T.K. Building neural networks of various types using parabolic integro-differential splines as activation functions // High availability systems. 2020;16(4):40-49. [https://doi: 10.18127/j20729472-202004-03](https://doi.org/10.18127/j20729472-202004-03)
6. Analysis of the article about KAN, a fundamentally new architecture of neural networks. <https://datasecrets.ru/articles/9>
7. Pavlidis T. Algorithms of machine graphics and image processing. Moscow: Radio and Communications, 1986. 395 p.
8. Neuralnetworktechnologiesofartificialintelligence. <https://intuit.ru/studies/courses/3521/763/lecture/32557?page=6&ysclid=mpxda4qh3877072367>.

Khachumov Mikhail V. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. Leading Researcher, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor. Research interests: artificial intelligence, computational mathematics, information technology. E-mail: kmike@inbox.ru

Khachumov Vyacheslav M. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. Chief Researcher, Doctor of Technical Sciences, Professor. Research interests: artificial intelligence, computational mathematics, information technology. E-mail: vmh48@mail.ru