© 2003 г. В. И. Швецов, канд. физ.-мат. наук
(Институт системного анализа РАН, Москва)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ[1]

Дан обзор основных методов и идей в области математического моделирования транспортных потоков. Обсуждаются два крупных направления: моделирование загрузки транспортных сетей городов и моделирование динамики транспортного потока. В области моделирования загрузки рассмотрены модели расчета корреспонденций и распределения потоков по сети, включая различные варианты равновесного распределения и алгоритм оптимальных стратегий. Рассмотрены также основные классы динамических моделей: макроскопические (гидродинамические), кинетические и микроскопические модели.

1. Введение

Транспортная инфраструктура - одна из важнейших инфраструктур, обеспечивающих жизнь городов и регионов. В последние десятилетия во многих крупных городах исчерпаны или близки к исчерпанию возможности экстенсивного развития транспортных сетей. Поэтому особую важность приобретает оптимальное планирование сетей, улучшение организации движения, оптимизация системы маршрутов общественного транспорта. Решение таких задач невозможно без математического моделирования транспортных сетей. Главная задача математических моделей — определение и прогноз всех параметров функционирования транспортной сети, таких как интенсивность движения на всех элементах сети, объемы перевозок в сети общественного транспорта, средние скорости движения, задержки и потери времени и т.д.

Математические модели, применяемые для анализа транспортных сетей, весьма разнообразны по решаемым задачам, математическому аппарату, используемым данным и степени детализации описания движения. Поэтому не представляется возможным дать исчерпывающую классификацию этих моделей. Основываясь на функциональной роли моделей, т.е. на тех задачах, для решения которых они применяются, можно условно выделить три основные класса:

- прогнозные модели,
- имитационные модели,
- оптимизационные модели.

Прогнозные модели предназначены для решения следующей задачи. Пусть известны геометрия и характеристики транспортной сети, а также размещение потокообразующих объектов в городе. Необходимо определить, какими будут транспортные потоки в этой сети. Более подробно, прогноз загрузки транспортной сети включает в себя расчет усредненных характеристик движения, таких как объемы межрайонных

[1]Опубликовано в журнале *Автоматика и Телемеханика* 2003, № 11, с. 3–46.

передвижений, интенсивность потока, распределение автомобилей и пассажиров по путям движения и др. При помощи этих моделей можно прогнозировать последствия изменений в транспортной сети или в размещении объектов.

В отличие от этого имитационное моделирование ставит своей целью воспроизведение всех деталей движения, включая развитие процесса во времени. При этом усредненные значения потоков и распределение по путям считаются известными и служат исходными данными для этих моделей. Кратко это отличие можно сформулировать так: прогнозные модели отвечают на вопрос: «сколько и куда» будут ехать в данной сети, а имитационные модели отвечают на вопрос: как в деталях будет происходить движение, если известно в среднем, «сколько и куда». Таким образом, прогноз потоков и имитационное моделирование являются дополняющими друг друга направлениями. Из сказанного следует, что к классу имитационных по их функциональной роли можно отнести широкий спектр моделей, известных под названием *модели динамики транспортного потока*. В моделях этого класса может применяться разная техника — от имитации движения каждого отдельного автомобиля до описания динамики функции плотности автомобилей на дороге.

Для динамических моделей характерна значительно бо̀льшая детализация описания движения и, соответственно, потребность в бо̀льших вычислительных ресурсах. Применение этих моделей позволяет оценить динамику скорости движения, задержки на перекрестках, длины и динамику образования «очередей» или «заторов» и другие характеристики движения. Основные области практического применения динамических имитационных моделей — улучшение организации движения, оптимизация светофорных циклов и др. В настоящее время актуальной задачей является разработка систем автоматизированного оперативного управления движением, работающих в режиме реального времени. Такие системы должны использовать информацию с датчиков в сочетании с динамическим имитационным моделированием. Однако помимо практических применений, развитие динамических моделей представляет большой научный интерес в связи с изучением транспортного потока как физического явления со сложными и нетривиальными свойствами. Среди таких свойств - спонтанная потеря устойчивости, явления самоорганизации и коллективного поведения и др.

Модели прогноза потоков и имитационные модели ставят своей целью адекватное *воспроизведение* транспортных потоков. Существует, однако, большое количество моделей, предназначенных для *оптимизации* функционирования транспортных сетей. В этом классе моделей решаются задачи оптимизации маршрутов пассажирских и грузовых перевозок, выработки оптимальной конфигурации сети и др. Методы оптимизации транспортных сетей представляют собой обширную область исследований, выходящую за рамки данного обзора. Основы этого направления изложены, например, в [118, 122].

В первой главе настоящего обзора рассмотрены основные аспекты и принципы моделирования загрузки транспортных сетей городов. Обсуждаются методы расчета корреспонденций, распределения корреспонденций по сети, включая улично-дорожную сеть и сеть внеуличного транспорта. Во второй главе дается обзор главных направлений в моделировании динамики транспортных потоков, включая макроскопические (или гидродинамические) модели, кинетические модели, микроскопические имитационные модели, модели типа клеточных автоматов. Изложение материала построено так, что более подробно описаны основные принципы и базовые варианты моделей, и кратко охарактеризованы существующие модификации и варианты моделей, где подробное изложение заменено необходимыми ссылками.

2. Модели прогноза загрузки транспортных сетей

2.1. Основные принципы моделирования загрузки

Транспортные потоки складываются из отдельных передвижений, совершаемых участниками движения, или пользователями транспортной сети. В общем случае, говоря о передвижениях, мы включаем в это понятие не только поездки различными видами транспорта, но и пешие передвижения. Основными факторами, определяющими количество совершаемых передвижений и их распределение по транспортной сети города, являются:

- Потокообразующие факторы, т.е. размещение объектов, порождающих передвижения, таких как места проживания, места приложения труда, культурно-бытового обслуживания и др.
- Характеристики транспортной сети, такие как количество и качество улиц и дорог, параметры организации движения, маршруты и провозные способности общественного транспорта и др.
- Поведенческие факторы, такие как мобильность населения, предпочтения при выборе способов и маршрутов передвижений и др.

Для построения математических моделей необходимо формальное описание указанных факторов. Основа такого описания — транспортный граф, узлы которого соответствуют перекресткам и станциям внеуличного транспорта, дуги — сегментам улиц и линий внеуличного транспорта. В число дуг также включаются дуги, изображающие пересадки с уличного на внеуличный транспорт. Отдельной составляющей транспортного графа является маршрутный граф общественного транспорта. Узлами маршрутного графа являются остановочные пункты, дугами — сегменты маршрутов между остановочными пунктами. С обычными узлами графа узлы-остановки соединены дугами-посадками и дугами-высадками.

Для описания распределения потокообразующих объектов необходимо разделить город на некоторое количество условных районов прибытия и отправления (ПО). Каждый район ПО включается в граф как узел, соединенный с обычными узлами графа специальными дугами-связями. Общий объем передвижений из одного района ПО в другой (независимо от конкретных путей передвижения) называется *межрайонной корреспонденцией.*

Основой для моделирования поведения пользователей является математическая формулировка критерия, на основании которого пользователь оценивает альтернативные пути и способы передвижения. Данный критерий принято называть *обобщенной ценой пути.* Увеличение обобщенной цены снижает привлекательность пути. Обобщенная цена пути складывается из обобщенных цен входящих в него дуг. Кроме того, в цену пути может добавляться цена переходов с дуги на дугу, например цена поворота при движении по улично-дорожной сети (УДС) или цена посадки при переходе с дуги-пересадки на дугу, соответствующую поездке.

Обобщенная цена определяется как взвешенная сумма слагаемых, выражающих влияние факторов различной природы на оценку пути. В общем случае она может включать в себя следующие слагаемые:

- время передвижения, которое вычисляется на основе заданной функции зависимости скорости движения от загрузки дуги. Используются различные функции скорости для дорог с разными физическими характеристиками и условиями регулировки движения;
- дополнительные задержки на различных элементах транспортной сети (время парковки, время ожидания и др.);
- денежные затраты (платные магистрали, плата за въезд в определенные зоны города и др.);
- условные штрафные добавки времени, используемые для моделирования различных особенностей транспортной сети и мер по управлению транспортом.

Как показывают обследования, время — основной фактор, определяющий цену пути. Другие факторы являются корректирующими и количественно выражаются в условных минутах, добавляемых к времени передвижения. Поэтому путь между двумя точками сети, имеющий минимальную обобщенную цену среди всех возможных путей, часто для простоты называют *кратчайшим* путем.

Важнейшей и фундаментальной особенностью формирования загрузки транспортной сети является то, что выбор способов и путей передвижения пользователями сети влияет на тот же выбор, осуществляемый другими пользователями. Математически это взаимное влияние описывается функциями зависимости цены дуги от суммарного потока по этой дуге. Данное обстоятельство создает обратную связь в процессе формирования загрузки: выбор путей, формирующих загрузку, основан на сопоставлении цен различных путей, в то время как цены сами определяются сложившейся загрузкой. Транспортные потоки, реально наблюдающиеся в сети, представляют собой некоторое *равновесное состояние* этого процесса. Для поиска этого равновесного состояния применяются итеративные алгоритмы, описанные ниже.

В задаче моделирования транспортных потоков в сети крупного города традиционно выделяют четыре основных этапа:

- оценка общих объемов прибытия и отправления из каждого района города (Trip generation);
- расщепление по способам передвижений, таким как пешие передвижения, передвижения с использованием общественного транспорта, передвижения на личном автомобиле и др. (Modal split);
- определение матриц корреспонденций, определяющих объем передвижений между каждой парой расчетных районов города (Trip distribution);
- распределение корреспонденций по транспортной сети, т.е. определение всех путей, выбираемых участниками движения, и определение количества передвижений по каждому пути (Trip assignment).

Разделение задачи моделирования на эти четыре этапа является условным, так как все этапы взаимосвязаны и не могут, вообще говоря, быть решены как отдельные задачи в силу отмеченных выше обратных связей. Так, большинство моделей расчета корреспонденций используют в качестве важного фактора обобщенные цены межрайонных передвижений. Аналогично, расщепление передвижений по видам (например, между частным и общественным транспортом) зависит от соотношения цен при использовании этих видов транспорта. Следовательно, расчет корреспонденций и их расщепление может быть выполнено корректно, если уже известна итоговая загрузка сети. Все это приводит к необходимости решать задачу последовательными приближениями, повторяя все шаги в итеративном режиме.

2.2. Модели расчета корреспонденций

Количественной характеристикой структуры передвижений по сети служит *матрица корреспонденций*, элементами которой являются объемы передвижений (автомобилей или пассажиров в час) между каждой парой условных районов ПО. Все многообразие передвижений, совершаемое в сети, может быть разбито на разные группы передвижений по следующим критериям:

- по различию в целях передвижений;
- по различию в выборе способов передвижения;
- по различию в предпочтениях при выборе путей передвижения.

Среди групп передвижений с различными целями наиболее важными и многочисленными являются

- передвижения от мест жительства к местам приложения труда и обратно (так называемые трудовые корреспонденции);
- передвижения от мест жительства к местам культурно-бытового обслуживания и обратно;
- передвижения, совершаемые между местами приложений труда (деловые поездки);
- передвижения, совершаемые между объектами культурно-бытового обслуживания.

Для каждой группы передвижений рассчитывается своя матрица межрайонных корреспонденций. Входной информацией к модели расчета корреспонденций являются общие объемы прибытия и отправления в каждом районе ПО. Оценка объема прибытий и отправлений по разным группам связана с пространственным размещением потокопорождающих объектов и *подвижностью населения*, т.е. средним количеством поездок, совершаемых с теми или иными целями. Эта оценка строится на основе имеющихся демографических и социально-экономических данных и результатов обследований и в основном предшествует собственно математическому моделированию.

Под различными способами передвижений понимают, например, передвижение пешком, с использованием общественного транспорта или личного автомобиля. С точки зрения методики расчета смысл деления на способы передвижения следующий: избранный способ передвижения не меняется на этапе распределения корреспонденций по сети. Процедура выбора пользователем пути передвижения разбивается тем самым на два этапа: выбор способа передвижения (*модальный выбор*) и выбор конкретного пути (путей) передвижения, осуществляемый на основе некоторого критерия оценки путей (*критериальный выбор*). Модальный выбор реализуется на стадии расчета корреспонденций, критериальный выбор реализуется на стадии распределения корреспонденций по сети.

Деление участников движения на группы по предпочтению приводит к понятию класса пользователей транспортной сети. В общем случае пользователей транспортной сети относят к разным классам, если они используют разные критерии оценки путей. В понятие «разные критерии» в данном случае включается также тот факт, что разные классы пользователей могут использовать для движения разные элементы транспортной сети. Вот некоторые примеры различных классов пользователей:

- В сети, содержащей платные участки дорог, или платный въезд в определенные районы, или платные и бесплатные парковки в различных районах люди разного достатка и социального статуса будут предпочитать разные пути.

- Пользователи сети общественного транспорта могут различаться по предпочтениям. Например, предпочитающие комфортное движение с минимальным количеством пересадок и пеших проходов или предпочитающие минимизировать время достижения цели.

Для моделирования комплексной загрузки сети с учетом всех факторов такого рода все пользователи разделяются на классы, для каждого класса рассчитывается отдельная матрица корреспонденций и производится распределение корреспонденций по сети. При этом для каждого класса используется свой критерий оптимальности путей.

К числу наиболее распространенных моделей расчета корреспонденций относятся гравитационные модели, энтропийные модели, модели конкурирующих возможностей и некоторые другие.

2.2.1. Гравитационная модель.

Исторически одной из первых математических моделей, предложенных для оценки межрайонных корреспонденций, была *гравитационная модель* [11, 102, 111, 113, 115, 120]. Рассмотрим систему, состоящую из некоторого множества R районов прибытия-отправления, соединенных между собой путями по транспортной сети. Исходными данными к расчету матрицы корреспонденций являются:

O_i — объем отправления из района $i \in R$,

D_j — объем прибытия в район $j \in R$.

В зависимости от типа корреспонденций объемы могут измеряться в автомобилях, пассажирах или других удобных единицах. Предполагается выполненным условие баланса общего прибытия и отправления

$$\sum_{i \in R} O_i = \sum_{j \in R} D_j. \tag{1}$$

Если исходные данные не удовлетворяют этому условию, необходимо скорректировать данные умножением на постоянный коэффициент.

Гравитационная модель основана на следующем простом положении: корреспонденция из района i в район j пропорциональна общему объему отправления из центра i, общему объему прибытия в центр j и некоторой функции $C(t_{ij})$, зависящей от *транспортного расстояния* t_{ij} между центрами i и j. С интуитивной точки зрения транспортное расстояние отражает степень близости районов с учетом скорости и удобства передвижений, предоставляемых транспортной сетью. Способ определения этой величины может различаться в разных вариантах модели.

При расчете однородной матрицы корреспонденций, т.е. корреспонденций, составленных из передвижений одного типа и пользователей одного класса, числовым выражением транспортного расстояния является обобщенная цена (в частном случае время проезда) оптимального (кратчайшего) пути, соединяющего два района. Если оцениваются смешанные корреспонденции, например включающие поездки как на общественном, так и на легковом транспорте, необходимо вычислить оптимальную цену передвижений на разных видах транспорта t_{ij}^k, где k - типы передвижений. В качестве транспортного расстояния тогда можно принять средневзвешенное этих цен с учетом коэффициентов расщепления корреспонденции по типам передвижений:

$$t_{ij} = \sum_k c^k(t_{ij}^1, \ldots, t_{ij}^K) t_{ij}^k, \tag{2}$$

здесь $c^k(t^1, \ldots, t^k)$ - коэффициенты расщепления корреспонденции на типы передвижений как функции от набора оптимальных времен передвижений для разных типов; эти коэффициенты удовлетворяют условию $\sum_k c^k = 1$.

Обозначим через F_{ij} корреспонденцию из района i в район j. Тогда гравитационная модель может быть сформулирована в виде

$$F_{ij} = A_i O_i B_j D_j C(t_{ij}), \quad i, j \in R, \tag{3}$$

где коэффициенты определяются из условий

$$\begin{aligned} \sum_{j \in R} F_{ij} &= O_i, \quad i \in R, \\ \sum_{i \in R} F_{ij} &= D_j, \quad j \in R, \\ F_{ij} &\geqslant 0, \quad i, j \in R. \end{aligned} \tag{4}$$

Функция $C(t)$ называется *функцией тяготения*. Она является главным фактором, определяющим распределение передвижений по дальности, поэтому применяется также термин *кривая расселения*. В некоторых публикациях эта функция трактуется как «априорная вероятность зарождения корреспонденции» в зависимости от расстояния, хотя в общем случае она не должна удовлетворять никаким условиям нормировки. Выбор этой функции осуществляется в ходе калибровки модели на основе сопоставления выходного модельного распределения дальностей с данными обследований. Проведено большое количество исследований по калибровке этой функции для разных городов [14, 93, 116, 117, 90]. При практических расчетах часто используется следующая аппроксимация:

$$C(t) = \exp\left(-\alpha t^\beta\right), \quad \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0. \tag{5}$$

Для трудовых корреспонденций в крупных городах подходящими являются значения параметров $\alpha \approx 0{,}065$, $\beta \approx 1$.

Вычисление корреспонденций в гравитационной модели сводится к определению коэффициентов A_i, B_j из системы нелинейных уравнений (3)-(4). Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм, называемый *алгоритмом балансировки*.

Расщепление корреспонденций по типам передвижений может быть произведено двумя способами. Во-первых, можно изначально оценить объемы O_i^k и D_j^k отдельно для каждого типа передвижений k, основываясь на социально-демографических показателях, таких как «коэффициент автомобилизации» и др. Далее для каждого типа рассчитывается отдельная матрица корреспонденций методом балансировки. Альтернативный путь состоит в балансировке матрицы суммарных корреспонденций согласно общим объемам ПО и последующем поэлементном расщеплении на типы передвижений. Коэффициенты расщепления при этом определяются индивидуально для каждой пары районов ПО в зависимости от соотношения цен межрайонных передвижений разных типов. Данный способ позволяет учитывать влияние на выбор способа передвижений факторов разной природы: социально-экономических характеристик населения, особенностей расположения районов и устройства транспортной сети.

2.2.2. Энтропийная модель.

Использование концепции энтропии для решения транпортных задач было предложено Вильсоном [111], и затем данный подход развивался во многих работах [112, 113, 36, 83]. Энтропийная модель исходит из вероятностного описания поведения пользователей сети. Пользователи сети случайным образом распределяются по некоторому набору возможных состояний. При расчете корреспонденций состоянием пользователя можно считать принадлежность его к корреспонденции из i в j. Независимый и случайный выбор всеми пользователями своих состояний приводит к тем или иным макроскопическим состояниям системы. Согласно основной концепции энтропийной модели состояние системы, которое реализуется в реальности, есть состояние с наибольшим *статистическим весом*. Использование статистического веса состояний вместо распределения вероятностей тех или иных состояний объясняется тем, что в энтропийных моделях может не существовать конечного и нормированного распределения вероятностей. Статистические веса состояний отражают сравнительные вероятности реализации различных состояний в системе. С учетом этой оговорки состояния с наибольшим статистическим весом часто также называются наиболее вероятными состояниями.

Математически состояние с наибольшим статистическим весом определяется как состояние, доставляющее максимум некоторой функции в пространстве состояний, называемой *энтропией системы*. В применении к задаче определения корреспонденций в транспортной сети энтропия определяется следующим выражением:

$$H(f) = \sum_{i,j} f_{ij} \ln\left(\frac{f_{ij}}{\nu_{ij}}\right), \quad f = \{f_{ij} | i, j \in R\}\,. \tag{6}$$

Здесь f_{ij} — числа *заполнения состояний*, т.е. количества элементов системы, находящихся в состояниях (i, j). Величины ν_{ij} имеют смысл «априорных наиболее вероятных» значений f_{ij}. Фактические наиболее вероятные значения F_{ij} определяются из решения задачи о максимизации энтропии при некоторой системе ограничений на f_{ij}. В отсутствие ограничений решение задачи максимизации приводит к априорным значениям $F_{ij} = \nu_{ij}$. Ограничения, накладываемые на распределения, могут быть самой разной природы. Как правило, эти ограничения отражают имеющуюся информацию о макроскопических характеристиках состояния системы. В системе ограничений, применяемых в энтропийных моделях транспортных сетей, можно выделить группу стандартных линейных ограничений, выражающих баланс прибытий и отправлений. Эта группа ограничений называется также *транспортными ограничениями.* С учетом сказанного энтропийная модель расчета корреспонденций может быть записана в виде

$$F = \operatorname{argmax}(H(f)), \quad f = \{f_{ij} | i, j \in R\}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in R} f_{ij} &= O_i, \quad i \in R, \\ \sum_{i \in R} f_{ij} &= D_j, \quad j \in R, \\ f_{ij} &\geqslant 0, \quad i, j \in R, \\ g_n(f) &= 0, \quad n = \overline{1, N}, \\ h_m(f) &\leqslant 0, \quad m = \overline{1, M}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь явно выделены транспортные ограничения, а также включены в общем виде N дополнительных ограничений-равенств и M ограничений-неравенств. Задача оптимизации (7)-(8) является стандартной задачей математического программирования с выпуклой целевой функцией. Система ограничений в этой задаче, как правило, линейна. Решение задачи в общем случае может быть получено методом множителей Лагранжа. В частном случае, когда имеются только транспортные ограничения, можно получить аналитическое выражение для решения задачи (7)-(8). Это выражение совпадает с выражением, даваемым гравитационной моделью, если задать априорные вероятности в соответствии с функцией тяготения: $\nu_{ij} = C(t_{ij})$. Другой способ установить связь между энтропийной и гравитационной моделью предложен в [112]. Предположим, что передвижения между районами прибытия и отправления i и j связаны с некоторым количеством «обобщенных затрат». Пусть для каждого района отправления известны суммарные общие затраты на передвижения:

$$\sum_{j \in R} c_{ij} f_{ij} = c_i, \quad i \in R. \tag{9}$$

Данные равенства могут быть использованы в качестве ограничений в задаче максимизации энтропии. Они называются *затратными ограничениями.* Рассмотрим энтропийную задачу, в которой априорные вероятности тех или иных значений корреспонденций равны: $\nu_{ij} = \text{const}$, а в число ограничений включены балансовые и затратные ограничения. Решение задачи также будет совпадать по виду с выражением гравитационной модели, если принять $t_{ij} = c_{ij}$ и взять функцию тяготения вида

$$C(c_{ij}) = \exp(-\lambda c_{ij}). \tag{10}$$

Коэффициент λ в этом выражении есть множитель Лагранжа задачи оптимизации, его значение определяется в ходе решения самой задачи. Согласно такой аргументации энтропийная модель может служить статистическим обоснованием для гравитационной модели, причем дает основание для выбора функции тяготения.

В рамках задачи максимизации энтропии может быть также осуществлен расчет корреспонденций с одновременным расщеплением по типам передвижений. Согласно общему подходу будем считать, что случайное состояние пользователя транспортной сети заключается в принадлежности к корреспонденции из i в j и выборе способа передвижения k. Состояние системы тогда определяется трехиндексным набором f_{ij}^k. Выражения для энтропийной функции и соответствующей задачи максимизации вполне аналогичны (6)-(8). При этом в состав ограничений должны быть включены дополнительные ограничения по общему объему передвижений для разных типов [123, 119].

2.2.3. Другие модели.

Одним из недостатков классической гравитационной модели является то, что объем корреспонденции связывается с характеристиками пары районов (включая транспортное расстояние между ними), взятых в отдельности от других районов. Как отмечается многими исследователями, «привлекательность» района для посещения (или объем прибытия в этот район) может зависеть также от расположения района прибытия среди других районов [37]. Например, район, расположенный в агломерации большого количества других районов посещения, может порождать большую корреспонденцию, чем изолированно расположенный район. Эта идея реализована в моделях семейства *конкурирующих центров* (competing destinations [27, 28]). Модели конкурирующих центров можно рассматривать как обобщения гравитационной модели, где в выражение (3) включаются дополнительные факторы, например, *индекс посещаемости* района прибытия, определяемый формулой

$$I_{ij} = \sum_{k\in R, k\neq i,j} \frac{D_k}{t_{kj}}. \tag{11}$$

Индекс посещаемости тем больше, чем больше и ближе к району посещения расположены альтернативные районы отправления. Введение этого фактора в модель позволяет моделировать агломерационные эффекты в структуре корреспонденций. Дальнейшие модификации модели связаны с попыткой учета структуры рассматриваемой системы районов. Например, рассмотрим некоторый регион, где имеются крупные города, окруженные системой прилегающих центров меньшего ранга, каждый из которых окружен прилегающими мелкими районами. В такой системе структурный эффект может проявляться в том, что центр крупного ранга имеет избыточную притягательность для окружающих «подчиненных» центров в иерархии («избыточную» здесь означает «большую, чем это диктуется факторами доступности»). Этот эффект моделируется «ранжированием» районов въезда-выезда по статусу в иерархии и введением соответствующих поправок в индексы посещаемости районов [24, 25].

Другой важный класс моделей представляют различные модификации модели *промежуточных возможностей* (intervening opportunities) Стауффера [98]. Модель

Стауффера исходит из предположения, что объем корреспонденции между двумя центрами определяется не столько расстоянием между ними, сколько количеством и емкостью альтернативных центров прибытия на пути, соединяющем центры, т.е. количеством альтернативных *возможностей* посещения. Рассмотрим сначала простую систему с одним центром отправления и рядом центров прибытия, расположенных вдоль одной линии. Пусть O — объем отправления, x_n — корреспонденция, λ_n — вероятность того, что участник движения остановится в центре n при условии, что центр n достигнут в ходе поездки. Тогда

$$x_n = O\lambda_n \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_j), \tag{12}$$

т.е. объем корреспонденции в центр n пропорционален произведению вероятности остановки в этом центре на вероятность того, что участник движения не остановился раньше. Для обобщений представляет интерес непрерывный аналог модели, когда места назначения непрерывно распределены вдоль некоторого луча. В непрерывной модели вместо корреспонденций мы будем говорить о *плотности* корреспонденций $x(r)$, где r — расстояние от центра отправления. Обозначим также: $y(r)$ — количество участников движения, добравшихся до точки r, $\lambda(r)$ — значение плотности распределения вероятности остановки в r при условии, что данная точка достигнута. Тогда, очевидно,

$$y(r) = O - \int_0^r x(\rho)\, d\rho, \qquad x(r) = y(r)\lambda(r). \tag{13}$$

Из уравнения (13) получаем следующее выражение для плотности корреспонденции:

$$x(r) = O\lambda(r) \exp\left(- \int_0^r \lambda(\rho)\, d\rho \right). \tag{14}$$

Различные варианты модели конкурирующих возможностей могут быть получены из уравнения (14) путем принятия различных гипотез о виде функции условной плотности вероятности $\lambda(r)$ [94, 110]. В применении к расчету корреспонденций в транспортной сети условную вероятность остановки в центре обычно связывают с емкостью центра по прибытию, т.е. количеством мест работы, обслуживания и др.

Обобщение модели на случай многих центров отправления и прибытия сталкивается с трудностью формального определения количества возможностей остановки «по пути» к данному центру. Один из подходов к решению проблемы состоит в ранжировании центров прибытия по удаленности от каждого центра отправления. Все центры, расположенные к центру отправления ближе, чем данный центр (независимо от направления), считаются альтернативными возможностями, «предшествующими» возможности остановки в данном центре. Используя выражение (14) и возвращаясь снова к дискретному описанию центров прибытия-отправления, получаем следующее выражение для корреспонденции:

$$F_{ij} = O_i \left(\exp(-\lambda U_j) - \exp(-\lambda U_{j+1}) \right), \tag{15}$$

где λ - константа, U_j - кумулятивная емкость по прибытию всех центров, предшествующих (в указанном выше смысле) центру j.

Основное отличие моделей гравитационного типа и моделей промежуточных возможностей состоит в следующем: гравитационные модели основаны на расчете транспортной доступности центров прибытия, рассматриваемых в основном изолированно от альтернативных центров, в то время как модели промежуточных возможностей учитывают взаимное расположение альтернативных возможностей прибытия, но не учитывают явно фактора транспортной доступности (дальности). В связи с этим предложены различные варианты агрегированных моделей, учитывающие оба указанных фактора. В частности, в [35] предложена объединенная «гравитационно-конкурирующая» (gravity-opportunity) модель энтропийного типа, т.е. основанная на поиске распределения корреспонденций с максимальным статистическим весом. Выражение (15) используется в этой модели в качестве «априорной вероятности» зарождения корреспонденции, фактор транспортной доступности учитывается путем введения «затратного» ограничения (9) в общую систему ограничений энтропийной задачи.

2.3. Модели распределения потоков

Загрузка транспортной сети определяется количеством транспортных средств или пассажиров, использующих для движения каждый элемент сети (дугу, поворот, перегон на маршруте общественного транспорта). Моделирование загрузки состоит в распределении межрайонных корреспонденций по конкретным путям, соединяющим пары районов. Входом к модели загрузки является матрица корреспонденций или в общем случае набор матриц, относящихся к передвижениям разных видов или разных пользовательских классов. Целью моделирования является определение для каждой пары районов прибытия-отправления

- набора путей, которые используются для передвижений между этими районами;
- коэффициентов расщепления (долей) корреспонденции между этими путями.

После расчета всей системы путей загрузка любого элемента сети может быть получена суммированием вкладов всех корреспонденций, использующих данный элемент. Таким образом, моделирование загрузки подразумевает более подробное описание движения, чем просто определение загрузки всех элементов. В иностранной литературе модели распределения корреспонденций по транспортной сети объединяются общим термином *traffic assignment*.

Существующие модели загрузки транспортной сети могут быть разбиты на классы по следующим основным признакам:

- модели, основанные на *нормативном* и *дескриптивном* подходе;
- *статические* и *динамические* модели.

В нормативных моделях распределение корреспонденций осуществляется на основе оптимизации некоторого глобального критерия эффективности работы транспортной сети. Таким критерием могут служить, например, суммарные затраты времени всеми участниками движения, суммарный пробег (авт*км или пасс*км) и др. При дескриптивном подходе предполагается, что структура транспортных потоков формируется в результате индивидуальных решений участников движения, основанных на оптимизации ими их личных критериев. Традиционно считается, что для моделирования загрузки реальных транспортных сетей следует применять дескриптивный подход. Нормативные модели могут применяться при планировании передвижений в тех случаях, когда планирующий орган имеет возможность директивного влияния на выбор маршрутов (например, при планировании централизованных грузовых перевозок). В последние годы, однако, интерес к нормативным моделям возрос в связи с началом разработки проектов о централизованном управлении движением частных автомобилей с использованием бортовых компьютеров и спутниковой связи.

Модель относится к классу *статических*, если загрузка моделируется в терминах усредненных характеристик движения на выбранный период моделирования (например, утренний час пик). В частности, если некоторая доля αF_{ij} корреспонденции использует выбранный маршрут движения, то предполагается, что эта доля дает вклад αF_{ij} в загрузку каждого элемента маршрута на протяжении всего периода моделирования. Такое предположение оправдано, если среднее время всех маршрутов не превышает характерное время, за которое сама корреспонденция успеет заметно поменяться. В случае, если динамика выезда меняется достаточно быстро, а маршруты достаточно длинные, необходимо учитывать, что представители той или иной корреспонденции загружают каждый участок избранного маршрута в разное время. При этом как сама корреспонденция, так и объемы прибытия-отправления в каждом районе должны задаваться как функции времени. Модели, в которые явно введен фактор времени и явно описывается динамика расчетных величин в течение периода моделирования, называют *динамическими.* [2]

Наиболее простым способом распределения корреспонденций по сети является наложение каждой корреспонденции на единственный оптимальный маршрут, соединяющий два района (метод «все или ничего»). Поскольку такой способ не учитывает естественного рассеяния, а также слишком чувствителен к характеристикам отдельных дуг графа, предложены различные способы расчета нескольких альтернативных путей и рассеивания корреспонденции по этим путям. Основная трудность таких моделей состоит в методике построения разумных альтернативных путей. В [124] предложена методика построения дерева *возможных путей* из всех узлов сети в некоторый фиксированный район прибытия. В соответствии с этим деревом происходит «ветвление» пути и рассеяние корреспонденции по возможным путям. Подобные методики, однако, не учитывают следующих важных факторов, влияющих на выбор путей движения.

- Выбор пути некоторыми пользователями увеличивает загрузку элементов сети, входящих в данных путь. В результате происходит увеличение обобщенной цены этих элементов. Это, в свою очередь, влияет на оценку и выбор путей другими пользователями. Таким образом, выбор, совершаемый одними участниками движения, косвенно влияет на выбор, совершаемый другими. Особенно

[2]Термин *динамический* употребляется в транспортном моделировании в разных смыслах. Здесь имеются в виду динамические модели прогноза загрузки (dynamic assignment); их не следует смешивать с динамическими имитационными моделями, которые подробно рассматриваются в разделе 3. Также динамическими иногда называют модели, описывающие долговременную эволюцию транспортной сети.

важно учитывать этот фактор при расчете загрузки улично-дорожной сети, поскольку время движения на каждом элементе этой сети очень сильно зависит от загрузки элемента.

- Особенностью передвижений с использованием системы маршрутов общественного транспорта является то, что, начиная движение, пользователь может принимать решение не о конкретном пути, а скорее о стратегии своего поведения. Конкретное продолжение пути может в этом случае зависеть от посадок на тот или иной маршрут в процессе движения (попросту говоря от того, «какой автобус подойдет первым» в пересадочном узле).

Наиболее эффективной моделью, в полной мере учитывающей фактор взаимного влияния пользователей, является модель, основанная на поиске *равновесного распределения* (*user-equilibrium assignment*) [106, 91]. Модель, определяющая загрузку транспортной сети на основе расчета стратегий поведения, называется моделью *оптимальных стратегий* (*optimal strategy*) [97].

2.3.1. Модель равновесного распределения потоков.

Рассмотрим статический вариант модели равновесного распределения. В модели предполагается, что все участники движения выбирают пути следования, исходя из минимизации индивидуальной обобщенной цены поездки. В результате индивидуальных выборов складываются значения интенсивности потока на всех элементах сети. Значения интенсивности, в свою очередь, являются главным фактором, определяющим обобщенную цену элементов и влияющим на критерии индивидуального выбора.

Предполагается, что в результате процесса «проб и ошибок» в системе устанавливается равновесное распределение потоков, обладающее следующими свойствами, известными как требования Вардрупа (Wardroop, [106]):

- все пути, соединяющие районы i и j, которые используются для движения представителями корреспонденции F_{ij}, имеют одинаковую цену;

- цена любого пути между районами i и j, который не используется для движения, превосходит цену используемых путей.

Суть этих свойств может быть кратко выражена в следующем предложении: при равновесном распределении ни один из участников движения не может изменить свой путь так, чтобы уменьшить свою индивидуальную цену поездки.

Математическая сложность задачи поиска равновесного распределения связана с тем, что эта задача не является задачей оптимизации, т.е. в формулировке отсутствует определение глобального критерия, минимум или максимум которого достигался бы на равновесном распределении. Можно показать, однако, что при некоторых дополнительных упрощающих предположениях эта задача может быть сведена к задаче оптимизации специально сконструированного глобального критерия.

Рассмотрим сначала задачу о распределении матрицы корреспонденций пользователей одного класса. Введем следующие обозначения:

I	множество узлов сети;
A	множество дуг сети;
A_i^-	множество дуг, входящих в узел $i \in I$;
A_i^+	множество дуг, выходящих из узла $i \in I$;
u_a	суммарный поток по дуге $a \in A$;
$u_{a_1a_2}$	суммарный поток на повороте с дуги $a_1 \in A$ на дугу $a_2 \in A$;
u_a^{pq}	поток по дуге $a \in A$ представителей корреспонденции F_{pq};
$u_{a_1a_2}^{pq}$	поток на повороте с дуги $a_1 \in A$ на дугу $a_2 \in A$ представителей корреспонденции F_{pq}.

Суммарные потоки на дугах и поворотах связаны с потоками представителей отдельных корреспонденций следующими соотношениями:

$$u_a = \sum_{p,q \in R} u_a^{pq}, \quad u_{a_1a_2} = \sum_{p,q \in R} u_{a_1a_2}^{pq}, \quad a, a_1, a_2 \in A. \tag{16}$$

Имеют место также линейные соотношения, выражающие «закон сохранения пользователей в сети».

$$u_{a_1}^{pq} = \sum_{a_2 \in A_i^+} u_{a_1a_2}^{pq},\ a_1 \in A_i^-, \quad u_{a_2}^{pq} = \sum_{a_1 \in A_i^-} u_{a_1a_2}^{pq},\ a_2 \in A_i^+, \quad i \in I, p, q \in R. \tag{17}$$

Данное равенство означает, что поток по каждой входящей в узел дуге равен сумме потоков поворотов с этой дуги (к повороту относится также и «движение прямо»), а поток по выходящей дуге равен сумме потоков поворотов на эту дугу, причем баланс должен соблюдаться для представителей каждой корреспонденции в отдельности. «Источниками» и «стоками» для участников движения являются районы прибытия-отправления:

$$F_{pq} = \sum_{a \in A_p^+} u_a^{pq} = \sum_{a \in A_q^-} u_a^{pq}, \quad p, q \in R. \tag{18}$$

Введем также *ценовые функции*, т.е. функции, выражающие зависимость обобщенной цены от суммарного потока:

$c_a(u)$	ценовая функция дуги $a \in A$;
$c_{a_1a_2}(u)$	ценовая функция поворота с дуги $a_1 \in A$ на дугу $a_2 \in A$.

Существенным для построения критерия является упрощающее предположение, что обобщенная цена является функцией от потока на данной дуге (повороте) и не зависит от потоков по другим дугам (например, пересекающим данную дугу). Ценовые функции предполагаются положительными неубывающими функциями потоков. По ценовым функциям можно построить *интегральные* ценовые функции по формулам:

$$C_a(u) = \int_0^u c_a(\nu)\, d\nu, \quad a \in A, \tag{19}$$

$$C_{a_1a_2}(u) = \int_0^u c_{a_1a_2}(\nu)\, d\nu, \quad a_1 \in A_i^-, a_2 \in A_i^+, i \in I. \tag{20}$$

Требуемый глобальный критерий строится как сумма интегральных ценовых функций всех дуг и поворотов. Таким образом, в принятых обозначениях модель равновесного распределения может быть сформулирована в виде задачи оптимизации [6]

$$\min_u F(u) = \sum_{a\in A} C_a(u_a) + \sum_{i\in I} \sum_{a_1\in A_i^-} \sum_{a_2\in A_i^+} C_{a_1a_2}(u_{a_1a_2}) \tag{21}$$

при системе линейных ограничений (16)-(18).

Интегральный критерий (21), применяемый для поиска равновесного распределения, является чисто математической конструкцией и не имеет содержательной интерпретации в транспортных терминах или терминах принятия решений. Строгое доказательство того, что минимизация этого критерия действительно приводит к равновесному распределению, можно найти, например, в [65]. Здесь приводится нестрогое рассуждение, позволяющее понять возникновение этого критерия.

Пусть задана некоторая функция от распределения потоков, представляющая собой сумму функций от потоков по каждой дуге:

$$F(u) = \sum C_a(u_a). \tag{22}$$

Рассмотрим распределение потоков, доставляющее минимум этой функции. Точка минимума любой функции обладает следующим свойством: при всякой вариации аргумента в этой точке изменение функции в линейном приближении неотрицательно. Рассмотрим простую вариацию распределения, состоящую в том, что малая доля δu потока снимается с одного из путей и перекладывается на альтернативный путь. Тогда изменение функции на каждой из дуг в линейном приближении равно $C'_a(u_a)(\pm\delta u)$. При этом на дугах исходного пути, где поток уменьшился, изменение отрицательно, а на дугах альтернативного пути положительно. Поскольку суммарное изменение должно быть неотрицательно, получаем, что сумма производных $C'_a(u_a)$ по дугам альтернативного пути не меньше, чем сумма производных по дугам исходного пути. Подберем функции $C_a(u_a)$ с тем расчетом, чтобы их производные давали значения цен дуг, как это сделано в (19)-(20). Тогда окажется, что в точке минимума суммарная цена альтернативного пути не меньше цены исходного пути, что и требуется условиями равновесного распределения.

Задача минимизации (16)-(21) может быть решена методом последовательных приближений, известном как метод Франка-Вульфа (Frank and Wolfe, [29]). Метод состоит в следующем: пусть на очередном k-м шаге итераций достигнуто некоторое распределение потоков $u^k = \left\{u_a^{pq}, u_{a_1a_2}^{pq}\right\}^k$. Линеаризуем целевую функцию в точке u^k и обозначим решение линеаризованной задачи u_L^k. Решение линеаризованной задачи используется для определения «направления смещения» при поиске очередного приближения, т.е. $(k+1)$-е приближение ищется в виде

$$u^{k+1} = (1-\lambda)u^k + \lambda u_L^k, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{23}$$

Величина λ определяет долю потоков, которая на очередном шаге итерации снимается с прежней системы путей и перекладывается на новую систему путей. Определение доли, которую следует перераспределить на каждом шаге, является отдельной задачей. Интересно отметить, что теоретически точное значение этой доли не важно для нахождения равновесного распределения. Именно, можно заранее задаться произвольной последовательностью долей λ_k, которые будут перераспределяться на каждом k-м шаге. Тогда, если выполнены простые условия

$$\lambda_k \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty, \quad \sum_k \lambda_k = \infty, \tag{24}$$

последовательность итераций сойдется к равновесному распределению. Смысл условий состоит в том, чтобы доли убывали (иначе распределение будет бесконечно колебаться вокруг равновесия), но «не слишком быстро» (иначе перераспределяемые доли станут слишком малы до того, как мы приблизимся к равновесию). Однако при неудачном выборе последовательности λ_k алгоритм может сходиться довольно медленно, поэтому предпочтительным является индивидуальный подбор перераспределяемой доли на каждом шаге. Наилучшее значение λ_k на каждом шаге можно получить, решив вспомогательную задачу оптимизации

$$\lambda_k = \arg\min_\lambda F(u(\lambda)), \quad u(\lambda) = (1-\lambda)u^k + \lambda u^k_L. \tag{25}$$

Задача (25) представляет собой общую задачу (21), «суженную» на одномерное направление, полученное на данном шаге итерации. Это — одномерная задача без ограничений, более того, целевая функция выпукла (это следует из монотонности ценовых функций), поэтому ее численное решение не составляет труда.

Рассмотрим теперь линеаризованную задачу (16)-(21). Дифференциал целевой функции в точке u^k имеет вид:

$$dF(u^k) = \sum_{a\in A} c_a(u^k_a)\, du_a + \sum_{i\in I} \sum_{a_1\in A_i^-} \sum_{a_2\in A_i^+} c_{a_1a_2}(u^k_{a_1a_2})\, du_{a_1a_2}. \tag{26}$$

Входящие в это выражение цены соответствуют распределению u^k и являются константами в этой задаче. Получаем, что линеаризованная задача заключается в отыскании распределения, при котором минимальна сумма постоянных (не зависящих от потоков) цен дуг и поворотов. Решение такой задачи совершенно очевидно: сумма цен будет минимальна, если каждую корреспонденцию наложить на единственный кратчайший путь, рассчитанный при этих ценах. Таким образом, для решения линеаризованной задачи не требуется применения численных методов линейной оптимизации, достаточно произвести расчет системы кратчайших путей. Для расчета кратчайших путей разработаны специальные эффективные алгоритмы [75, 114].

Первичными переменными в задаче являются потоки представителей отдельных корреспонденций $u^{pq}_a, u^{pq}_{a_1a_2}$, так как именно для этих переменных сформулированы ограничения. Однако целевая функция зависит только от суммарных потоков на дугах и поворотах $u_a, u_{a_1a_2}$. Далее, если для распределений u^k, u^k_L ограничения задачи выполнены, то они автоматически будут выполняться на решении одномерной задачи. Действительно, если перераспределяется фиксированная доля λ представителей каждой корреспонденции, то это приводит к перераспределению ровно той же доли суммарного потока на каждой дуге. Единственное место в алгоритме, где рассматриваются потоки представителей отдельных корреспонденций, это вычисление u^k_L путем наложения корреспонденций на кратчайшие пути. Сам способ такого вычисления гарантирует выполнение ограничений задачи. Таким образом, мы можем рассчитать равновесное распределение, оперируя только значениями суммарных потоков на дугах и поворотах, что значительно экономит оперативную память при компьютерных расчетах. Если для анализа свойств загрузки все же требуется знать полную раскладку корреспонденций по путям, можно организовать сохранение рассчитываемых путей на диске компьютера «по мере использования», т.е. не занимая оперативной памяти.

Окончательно получаем алгоритм вычисления равновесного распределения потоков:

- Формируется начальное распределение u^0. Самым простым способом для этого является распределение всех корреспонденций по кратчайшим путям, рассчитанным по незагруженной сети.

Последующие итерации алгоритма делаются следующим образом.

- Цены всех элементов сети пересчитываются в соответствии с полученными на данной итерации значениями потоков u^k.
- В соответствии с новыми ценами отыскивается система кратчайших путей между центрами въезда-выезда.
- Рассчитываются потоки u^k_L, которые получаются в результате наложения корреспонденций на кратчайшие пути (решение линеаризованной задачи).
- Новое распределение потоков рассчитывается по формуле $u^{k+1} = (1-\lambda)u^k+\lambda u^k_L$, где λ определяется решением одномерной задачи (25).

Рассмотрим теперь вопрос о критерии остановки алгоритма. Алгоритм должен заканчивать свою работу, если полученное на очередном шаге распределение «достаточно близко» к равновесному распределению. Если распределение уже находится в равновесии, то сумма всех цен на системе кратчайших путей в точности совпадет с суммой всех цен на самом распределении. Действительно, цены кратчайших путей в равновесии в точности равны ценам всех других используемых путей. Поэтому оценкой степени приближения к равновесию на каждом шаге может служить разность между суммой всех цен при достигнутом распределении и суммой всех цен по кратчайшим путям:

$$\left|\frac{\sum c(u^k)u^k - c(u^k)u^k_L}{\sum c(u^k)u^k}\right| < \varepsilon, \tag{27}$$

где подразумевается суммирование по всем дугам и поворотам (индексы для краткости опущены). Разность сумм цен отнесена к общей сумме цен, чтобы получить безразмерную характеристику сходимости.

Полезной при практических расчетах является следующая модификация начального шага алгоритма: корреспонденции расщепляются на фиксированное число долей и перед распределением очередной доли осуществляется пересчет кратчайших путей с учетом уже достигнутой загрузки. Полученное таким образом начальное распределение значительно ближе к равновесию, чем распределение всего объема корреспонденций на единственную систему кратчайших путей. Это приводит к значительному сокращению числа последующих итераций.

2.3.2. Расширенные модели равновесного распределения.

К числу наиболее важных расширений и направлений развития модели равновесного распределения относятся:

- модели равновесного распределения для нескольких классов пользователей;
- модели равновесного распределения с переменным спросом на поток;
- стохастические модели равновесного распределения;
- динамические модели равновесного распределения.

Модели *многопользовательского равновесия* позволяют находить равновесное распределение потоков в системе с несколькими классами пользователей. Напомним, что к разным классам пользователей относятся участники движения, для которых различается обобщенная цена одних и тех же элементов сети (слова «различается цена» относятся также и к ситуации, когда представителям одного из классов пользователей запрещено передвигаться по дуге; в этом случае можно говорить, что цена дуги «равна бесконечности»). Вследствие этого представители различных классов пользователей распределяются по разным путям. Предполагается, что для каждого класса пользователей вычислена отдельная матрица корреспонденций. При этом распределение пользователей разных классов не является независимым друг от друга, поскольку цены дуг и поворотов являются функциями суммарного потока на дуге (повороте). Следовательно, возникает проблема поиска равновесия в системе.

Поскольку транспортные средства, относящиеся к различным классам пользователей, могут давать разный вклад в общую загрузку (например, грузовые автомобили оказывают более существенное влияние на загрузку, чем легковые), суммарные потоки следует измерять в некоторых условных единицах (условных транспортных средствах). В эти же условные единицы должны быть переведены матрицы корреспонденций для всех классов пользователей. Сам вид функций задержки теоретически также может различаться для разных классов пользователей. Однако в модели многопользовательского равновесия действует следующее ограничение: на каждой дуге функции задержки для разных классов пользователей могут отличаться только на постоянную (не зависящую от суммарного потока) величину. Данное ограничение носит чисто математический характер: именно в таком предположении удается построить интегральный критерий, аналогичный (21), минимум которого достигается на равновесном распределении. Принято следующее «оправдание» такого ограничения: разные классы пользователей имеют разную скорость свободного движения, а затор «действует на всех одинаково».

Пусть M - множество классов пользователей. Обозначим через u_a^m поток по дуге a пользователей класса $m \in M$ и предположим, что ценовая функция для каждого класса пользователей имеет вид

$$c_a^m(u_a) = c_a(u_a) + d_a^m, \quad a \in A, m \in M, \tag{28}$$

где d_a^m - константы, определяющие разницу в задержке для разных классов при свободном движении. Тогда критерий в задаче многопользовательского равновесия запишется в виде:

$$\min_u F(u) = \sum_{a \in A} C_a(u_a) + \sum_{m \in M} \sum_{a \in A} d_a^m u_a^m. \tag{29}$$

Здесь для краткости опущены слагаемые, относящиеся к задержкам на поворотах. Алгоритм минимизации этого критерия вполне аналогичен описанному выше алгоритму в случае одного класса пользователей.

Модели равновесного распределения с *переменным спросом на поток* позволяют в рамках единого алгоритма отыскивать как само распределение, так и корреспонденции [6, 26, 31, 91]. Предположим, что объем корреспонденции между каждой парой районов прибытия и отправления задан в виде функции от транспортного расстояния, выраженного в обобщенной цене межрайонного передвижения:

$$F_{pq} = D_{pq}(c_{pq}). \tag{30}$$

Здесь c_{pq} - обобщенная цена передвижения из района q в район p, рассчитанная по кратчайшему пути. Если потоки в сети находятся в равновесном состоянии, то эта цена равна цене всех используемых путей, соединяющих два района. Данная функция называется *функцией спроса на передвижения*. Функция спроса может содержать параметры, характеризующие емкость районов по прибытию и отправлению, а также параметры, характеризующие наличие альтернативных возможностей передвижений (например, общественный транспорт). Основным требованием к этой функции является монотонное убывание (или, по крайней мере, невозрастание) при увеличении цены межрайонного передвижения.

В задаче поиска равновесного распределения с фиксированным спросом корреспонденции F_{pq} являются заданными константами. В задаче с переменным спросом они выступают как переменные величины, связанные с потоками по дугам u_a^{pq} соотношениями (18). Задача поиска равновесного распределения с переменным спросом формулируется так: найти такое распределение потоков, при котором для каждой пары районов прибытия и отправления цены всех используемых путем равны между собой и не превосходят цен всех других путей, соединяющих пару районов (т.е. выполнены условия обычного равновесного распределения), и в дополнение корреспонденции F_{pq} удовлетворяют соотношениям (30). Эта задача также может быть сведена к задаче минимизации глобального критерия следующего вида:

$$\min_u F(u) = \sum_{a \in A} C_a(u_a) + \sum_{p,q \in R} \int_0^{F_{pq}} D_{pq}^{-1}(f)\, df. \tag{31}$$

Данный критерий совпадает с критерием (21) (для краткости опущено слагаемое, относящееся к поворотам), в котором добавлено слагаемое, содержащее интеграл от *обратной* функции спроса $D_{pq}^{-1}(f)$. Эта функция монотонно убывает с ростом корреспонденции, что гарантирует единственность решения.

Данная модель обладает математическим изяществом, однако, на наш взгляд, она не очень хороша для практического применения. В модели объемы корреспонденции представлены однородными величинами, жестко увязанными с единственным вариантом загрузки сети. В реальности загрузка меняется в течение суток (а также в зависимости от времени года), и на формирование корреспонденций влияют, очевидно, усредненные характеристики загрузки. Кроме того, сами корреспонденции существенно неоднородны по составу. Они являются суммами матриц передвижений, совершаемых с различными целями, при этом фактор обобщенных затрат по разному влияет на эти передвижения. Например, трудовые передвижения не так чувствительны к фактору времени, как передвижения, совершаемые «в магазин за продуктами». В целом задача вычисления матриц корреспонденций имеет много аспектов, не укладывающихся в процедуру поиска одномоментного равновесия.

Вместе с тем задача расчета корреспонденций не может быть полностью отделена от задачи распределения корреспонденций по сети. Действительно, существующие модели расчета корреспонденций среди прочих факторов учитывают межрайонные транспортные расстояния. Эти расстояния выражаются через обобщенные цены передвижений, которые, в свою очередь, зависят от загрузки. Для того, чтобы расчет был корректным, необходимо, чтобы обобщенные цены, используемые при расчете матриц, соответствовали тем ценам, которые получаются в результате распределения этих матриц по сети. Этого можно добиться при помощи итеративного процесса вычисления матриц и загрузки сети. На каждом шаге итерации для расчета матриц используются цены, полученные в результате расчета загрузки на предыдущем шаге. На первом шаге можно воспользоваться ценами, определяемыми по «пустой» сети. Итерации проводятся до тех пор, пока изменение общих показателей загрузки на шаге итерации не станет достаточно малым. В практических приложениях итеративный процесс стабилизируется (изменение общих показателей — менее одного процента) после 3-5 итераций с применением метода скользящего среднего.

Рассмотренные выше модели равновесия основаны на *детерминированном* поведении пользователей. Они предполагают, что пользователи имеют точное представление о потоках и задержках на всех дугах, одинаково оценивают пути и принимают точные решения при выборе путей. Однако в реальности поведение пользователей стохастично, т.е. содержит существенный элемент случайности. Для учета этой стохастичности была предложена модель *стохастического равновесного распределения* [22, 67]. Основная идея модели состоит в том, что в ней различается *фактическая* и *предполагаемая* тем или иным пользователем цена пути. Предполагаемую цену можно рассматривать как случайную величину, другими словами, разные пользователи случайным образом предполагают разную цену одной и той же дуги. Условие стохастического равновесия тогда формулируется так: распределение называется равновесным, если ни один из участников движения *не предполагает*, что может улучшить свою индивидуальную цену поездки, изменив путь следования.

Задача поиска стохастического равновесия может быть сведена к следующей задаче оптимизации [92]:

$$\min_u F(u) = \sum_{a\in A} u_a c_a(u_a) - \sum_{a\in A} C_a(u_a) - \sum_{p,q\in R} F_{pq} S_{pq}(u). \tag{32}$$

Здесь функции $S_{pq}(u)$ являются математическими ожиданиями предполагаемых цен передвижения между районами p и q, вычисленных при некотором распределении потоков u. Обозначим через K_{pq} набор альтернативных путей, соединяющих районы p и q, а через c_k^{pq} — фактическую цену пути $k \in K_{pq}$. Тогда предполагаемую цену можно представить в виде $\hat{c}_k^{pq} = c_k^{pq} + \xi_k^{pq}$, где ξ_k^{pq} — случайная величина с нулевым математическим ожиданием. Соответственно, математическое ожидание $M\hat{c}_k^{pq} = c_k^{pq}$.

Тогда

$$S_{pq}(u) = M\left[\min_{k\in K_{pq}} \hat{c}_k^{pq}\right]. \tag{33}$$

Эта функция зависит от распределения u, поскольку фактические цены, при которых берется математическое ожидание, зависят от u.

Численное решение проблемы (32) значительно сложнее, чем соответствующей нестохастической проблемы. Основная трудность связана с тем, что для вычисления очередного приближения недостаточно знания суммарной загрузки, достигнутой на предыдущих шагах, но требуется явно использовать все межрайонные пути и цены, полученные в ходе итераций. Для решения применяют метод скользящего среднего по доле λ перераспределяемых на каждой итерации потоков [84].

В последние годы упор в совершенствовании моделей загрузки делается на развитие *динамических* моделей [30, 50, 10]. Добавление времени как дополнительной переменной чрезвычайно усложняет проблему. Речь идет не просто об увеличении размерности задачи, но и о трудностях в теоретическом определении базовых понятий, например, ценовой функции и самого равновесия [51]. Далее, для того, чтобы отслеживать точное время проезда по той или иной дуге вдоль пути, необходимо более детальное описание условий движения *внутри* дуги, т.е. применение некоторых имитационных моделей [18]. С учетом итеративного характера поиска равновесия даже при использовании простых имитационных моделей вычислительные ресурсы возрастают чрезвычайно. Подробное обсуждение этого направления выходит за рамки настоящего обзора, отметим только, что существующие на данный момент работы по *практическому* применению моделей динамического равновесия связаны с использованием суперкомпьютеров и систем с параллельными процессорами [19].

2.3.3. Модель оптимальных стратегий.

Процесс формирования загрузки сети общественного транспорта имеет особенности, не характерные для загрузки сети автомобильного транспорта. Если пользователь сети УДС в ситуации равновесия использует оптимальный путь для своего движения до цели, то пользователь сети пассажирского транспорта может определить для себя *оптимальную стратегию поведения* в ходе движения к цели. Под стратегией поведения пассажира в сети общественного транспорта понимается набор правил, руководствуясь которыми в процессе своего движения, пользователь достигает точки назначения. Простейшим примером стратегии является следование априорно выбранному пути, что соответствует поведению участников движения в моделях равновесного распределения. Более сложные стратегии возникают, если пассажир в ходе движения принимает те или иные решения о продолжении своего пути в зависимости от информации, полученной в ходе движения. Например, решение, принимаемое в очередном пересадочном узле, может зависеть от того, какое транспортное средство будет отправляться из узла первым. Еще более сложные стратегии предусматривают, например, такую возможность: пассажир может принять решение сменить транспортное средство, увидев из окна автобуса, что есть возможность пересесть на автобус-экспресс, и др.

Стандартная модель оптимальных стратегий исходит из упрощенного описания поведения пользователя. Согласно этой модели выбор стратегии достижения цели состоит в следующем:

- для каждого узла, в котором может оказаться пассажир в процессе движения к цели, среди всех возможных продолжений фиксируется некоторый выбранный набор. Будем говорить, что выбранные продолжения «включены в стратегию». Важно, что набор фиксируется «заранее», т.е. не в процессе движения, а на этапе выбора стратегии;

- оказавшись в том или ином узле, пользователь всегда выбирает то из продолжений, включенных в стратегию, которое первым предоставит возможность обслуживания (отправление транспортного средства).

Поскольку события прихода и отправления транспортных средств можно рассматривать как случайные события с некоторым законом распределения, то конкретные пути реализуются с той или иной вероятностью. Таким образом, модель оптимальных стратегий является изначально стохастической моделью.

Для математического описания модели необходимо расширить транспортный граф до *маршрутного* графа. Маршруты общественного транспорта описываются дополнительными узлами и дугами. Будем называть узлы и дуги обычного графа базовыми узлами и дугами в маршрутном графе. Рассмотрим базовую дугу, по которой проходят k маршрутов общественного транспорта. Над каждой такой дугой размещается k маршрутных дуг, соответствующих поездке вдоль этой дуги на одном из маршрутов. Сама базовая дуга также входит в граф как дуга для пешеходного движения[3]. Для упрощения описания принимается, что остановки общественного транспорта всегда располагаются в узлах базового графа. Все маршрутные узлы, в которых делается остановка, соединяются с соответствующим базовым узлом условными дугами-посадками и высадками.

Данное выше определение стратегии может быть сформулировано в терминах маршрутного графа так: в каждом узле маршрутного графа среди всех исходящих дуг фиксируется некоторый набор дуг, включенных в стратегию. Попав в узел, пользователь может продолжить движение по одной из фиксированных дуг. Таким образом, задание стратегии эквивалентно заданию некоторого *подграфа* всего маршрутного графа. Будем называть этот подграф *графом стратегии.*

Стратегия называется допустимой, если

- она не содержит *циклов*, т.е. двигаясь по дугам, включенным в стратегию, нельзя вернуться повторно в уже пройденный узел;

- она обеспечивает достижение цели, т.е. выбирая в каждом узле произвольную дугу, из числа включенных в стратегию, пользователь всегда за конечное число шагов попадет в целевой узел.

Для каждой дуги маршрутного графа заданы две характеристики:

c_a — обобщенная цена дуги, включающая, как всегда, среднее время движения по

[3] Кроме дуг, соответствующих перегонам внеуличного транспорта, по которым обычно нет движения пешеходов

дуге и другие добавки, выраженные в условных минутах. Будем в дальнейшем говорить просто о времени.

f_a — *частота обслуживания.* Эта характеристика имеет смысл только для дуг-посадок. Она численно равна среднему количеству отправлений транспортных средств из данного узла по тому маршруту, на который осуществляется посадка. Величина $1/f_a$ — это средний интервал отправления.

Для единообразия описания транспортного графа можно считать, что все дуги обладают этими двумя характеристиками. При этом частота обслуживания для всех дуг, не являющихся дугами-посадками, равна бесконечности. Соответственно, среднее время ожидания обслуживания на этих дугах равно нулю.

Предполагая, что время прибытия пассажира в узел распределено равномерно, а интервал отправления постоянный и равен $1/f_a$, получим, что среднее время движения по дуге, включая ожидание, равно $1/2f_a + c_a$. Зная обобщенную цену и частоту всех дуг, можно вычислить среднее время достижения цели от любого узла при использовании данной стратегии. Это можно сделать рекуррентно. Пусть k — номер целевого узла, t_i — среднее время достижения узла k из узла i при использовании данной стратегии. Очевидно, $t_k = 0$. Рассмотрим произвольный узел i. Возможные продолжения согласно выбранной стратегии — это дуги $a = (i, j) \in A_i^+$. Пусть t_j уже вычислено для всех конечных узлов этих дуг. Тогда среднее время t_i дается формулой

$$t_i = \left(1/2 + \sum f_a(c_a + t_j)\right) / \sum f_a. \tag{34}$$

Пользуясь этой рекуррентной формулой, можно вычислить среднее время для любого узла.

Оптимальной стратегией для достижения цели k из узла i называется стратегия, при которой среднее время достижения цели из данного узла наименьшее среди всех допустимых стратегий. Среднее время в оптимальной стратегии можно также называть *потенциалом* узла i по отношению к узлу k.

Оптимальная стратегия обладает следующим важным свойством: оптимальная стратегия для любого узла отправления i одновременно является оптимальной стратегией и для всех промежуточных узлов j, которые могут встретиться при движении в соответствии с этой стратегией. Данное свойство вполне аналогично свойству Беллмана для кратчайших путей, согласно которому отрезок кратчайшего пути от некоторого промежуточного узла до конечного узла сам является кратчайшим путем от промежуточного узла. Действительно, если при добавлении или исключении из стратегии какой-либо исходящей дуги узла j потенциал этого узла уменьшается, то, очевидно, должны уменьшиться и потенциалы всех узлов, из которых можно попасть в узел j. Данное свойство позволяет определить одну стратегию для достижения цели k, являющуюся оптимальной сразу для всех узлов отправления. Действительно, пометим в каждом узле сети исходящие дуги, входящие в оптимальную стратегию для этого узла. Совокупность этих помеченных дуг, очевидно, определит оптимальную стратегию для всех узлов.

Для вычисления оптимальной стратегии (т.е. выделения подграфа в маршрутном графе) для произвольного целевого узла применяется алгоритм, аналогичный алгоритму послойного расширения при поиске кратчайших путей.

Рассмотрим теперь задачу распределения корреспонденций F_{pq} по маршрутному графу. Предполагаем, что все участники движения (пассажиры) следуют оптимальным стратегиям. Поскольку цены и частоты дуг в модели оптимальных стратегий считаются постоянными, достаточно перебрать все районы прибытия q, для каждого из них вычислить оптимальную стратегию, распределить корреспонденции из всех других районов в данный район согласно этой стратегии, а получившиеся потоки сложить. Обозначим через u_i входящий поток в узел $i \in I$:

$$u_i = \sum_{a \in A_i^-} u_a. \tag{35}$$

Для районов отправления «входящим» потоком считается объем отправления: $u_p = F_{pq}$. Поток u_i распределяется по исходящим дугам, которые включены в оптимальную стратегию. Доля потока, распределенного на каждую исходящую дугу, пропорциональна вероятности того, что именно эта дуга первой предоставит возможность обслуживания. Тогда

$$u_a = u_i \, f_a / \sum f_b. \tag{36}$$

Для экономии вычислений следует на этапе расчета стратегии запомнить список всех узлов сети (включая районы отправления), упорядоченный по потенциалу относительно района прибытия. Затем наложение потоков на исходящие дуги начинается с района отправления с наибольшим потенциалом и продолжается для всех узлов в порядке убывания потенциалов. При такой схеме гарантировано, что при переходе к очередному узлу i входящий в этот узел поток u_i будет уже вычислен. Повторяя процедуру распределения для всех центров прибытия, мы накапливаем суммарные потоки на всех дугах маршрутного графа.

3. Модели динамики транспортного потока

Большинство существующих моделей динамики транспортных потоков может быть приблизительно разделено на три класса:

- макроскопические (гидродинамические) модели
- кинетические (газодинамические) модели
- микроскопические модели

Макроскопическими называют модели, которые описывают движение автомобилей в усредненных терминах, таких как плотность, средняя скорость, поток и др. При таком подходе транспортный поток уподобляется движению специфической жидкости, поэтому модели этого класса также называют *гидродинамическими.*

Микроскопическими называются модели, в которых явно моделируется движение каждого автомобиля. Такой подход позволяет теоретически достичь более точного описания движения автомобилей по сравнению с усредненным макроописанием, однако этот подход требует больших вычислительных ресурсов при практических применениях.

Промежуточное место занимает кинетический подход, при котором поток описывается плотностью распределения автомобилей в фазовом пространстве, т.е. пространстве координат и скоростей автомобилей. Динамика фазовой плотности описывается *кинетическим* уравнением. Это уравнение основано на усредненном описании эффектов взаимодействий индивидуальных автомобилей, и в этом смысле оно ближе к микроуровню, чем гидродинамические уравнения. Важное теоретическое значение кинетических моделей состоит в том, что на их основе можно систематически выводить макроскопические модели.

Особое место в классе микромоделей занимают модели типа *клеточных автоматов* (Cellural Automata), получившие широкое развитие в последние годы. В этих моделях принято чрезвычайно упрощенное дискретное во времени и пространстве описание движения автомобилей, за счет чего достигается высокая вычислительная эффективность.

3.1. Макроскопические модели

Первая макроскопическая модель, основанная на гидродинамической аналогии, была предложена в 1955 в [66]. Модель известна в научной литературе как LW-модель, названная так по именам авторов (Lighthill и Whitham). Обозначим через $\rho(x,t)$ — плотность, $V(x,t)$ — среднюю скорость автомобилей в точке дороги с координатой x в момент времени t. Эти величины связаны уравнением непрерывности, выражающим «закон сохранения количества автомобилей» на дороге:

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho V) = 0. \tag{37}$$

Предполагается, что средняя скорость является детерминированной (убывающей) функцией плотности:

$$V(x,t) = V_e(\rho(x,t)). \tag{38}$$

Подставляя (38) в (37), получаем следующее уравнение

$$\partial_t \rho + \left(V_e + \rho\frac{dV_e}{d\rho}\right)\partial_x \rho. \tag{39}$$

Уравнение (39) описывает распространение нелинейных *кинематических волн* со скоростью переноса $c(\rho) = V_e(\rho) + \rho dV_e/d\rho$. С течением времени профиль волны может становиться все более крутым, вплоть до вертикального угла наклона, при котором образуется разрывный профиль волны (*шоковые волны*) [108, 109]. Во многих работах разные варианты модели с шоковыми волнами были использованы для описания динамики заторов [32, 73, 20]. Хотя первоначальная LW-модель представляется в настоящее время черезчур упрощенной, именно простота реализации делает возможным использование этой модели как вспомогательного инструмента при моделировании динамики загрузки больших транспортных сетей [18, 19].

В реальности плотность автомобилей как правило не меняется скачками, а является непрерывной функцией координат и времени. Для устранения шоковых волн в уравнение (39) был добавлен член второго порядка, описывающий диффузию плотности, который приводит к сглаживанию профиля волны:

$$\partial_t \rho + V_e \partial_x \rho = -\rho\frac{dV_e}{d\rho}\partial_x \rho + D\partial^2_{xx}\rho. \tag{40}$$

Наиболее важным недостатком модели является соотношение (38), которое предполагает, что средняя скорость потока $V(x,t)$ в каждый момент времени соответствует равновесному значению V_e при данной плотности автомобилей. Поэтому данная модель не адекватна реальности при описании неравновесных ситуаций, возникающих вблизи неоднородностей дороги (съезды и выезды, сужения), а также в условиях так называемого «stop-and-go» движения.

Для описания неравновесных ситуаций вместо детерминированного соотношения (38) было предложено использовать дифференциальное уравнение для моделирования *динамики* средней скорости. Впервые предложенное в 1971 в [77] уравнение скорости имело вид:

$$\partial_t V + V\partial_x V = -\frac{C(\rho)}{\rho}\partial_x \rho + \frac{1}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right), \tag{41}$$

где

$$C(\rho) = -\frac{1}{2\tau}\frac{dV_e}{d\rho}. \tag{42}$$

Данное уравнение было выведено на основе микроскопического описания движения отдельных автомобилей в соответствии с моделью *«следование за лидером»* (см. раздел 3.4.1). Слагаемое $V\partial_x V$ называется *конвекционным* и описывает изменение скорости в данном месте дороги за счет кинематического переноса автомобилей из предшествующего сегмента дороги в данную точку со средней скоростью потока. Первое слагаемое в правой части называется *«упреждающим» (anticipation)*; оно описывает реакцию водителей (торможение или ускорение) на изменение ситуации впереди. Второе слагаемое в правой части называется *релаксационным* и описывает тенденцию приближения средней скорости V к равновесному при данной плотности значению $V_e(\rho)$; τ - характерное время релаксации.

Впоследствии было предложено значительное количество различных модификаций уравнения скорости, а также численного метода для его решения [78, 79, 74, 16, 17, 88]. Одним из наиболее существенных недостатков уравнения Пэйна является то, что стационарное однородное решение $\rho(x,t) \equiv \rho_0, V(x,t) \equiv V_e(\rho_0)$ является устойчивым в линейном приближении к малым возмущениям при всех значениях плотности. Однако анализ эмпирических данных показывает, что при высоких значениях плотности ламинарное движение транспортного потока становится неустойчивым, и малые возмущения приводят к возникновению *фантомных заторов*, или волн stop-and-go движения. Данная проблема может быть преодолена следующим изменением в «упреждающем» члене уравнения:

$$C(\rho) = \frac{d}{d\rho}\mathcal{P}_e(\rho), \qquad \mathcal{P}_e(\rho) = \rho\Theta_e(\rho). \tag{43}$$

Здесь $\mathcal{P}$ - *давление потока (traffic pressure)*, выраженное через вариацию скоростей в потоке Θ. Уранение скорости при такой замене приобретает вид [80, 81]

$$\partial_t V + V\partial_x V = -\frac{1}{\rho}\partial_x \mathcal{P}_e + \frac{1}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right). \tag{44}$$

Согласно этому уравнению автомобили замедляют свое движение, если давление потока впереди возрастает, и ускоряют в противном случае. Предполагается, что вариация скоростей Θ зависит от плотности потока. Для этой зависимости применяются различные приближения, полученные из анализа эмпирических данных. В частности, в моделях [60, 61, 52] в качестве первого приближения используется положительная константа: $\Theta_e(\rho) = \Theta_0$.

Уравнение (44), так же как и (37)-(38), предсказывает возникновение шоковых волн. Для сглаживания и предотвращения разрывов решений в правую часть уравнения добавляется диффузионное слагаемое вида $\nu \partial_{xx}^2 V$, аналогичное слагаемому, описывающему вязкость в уравнениях классической гидродинамики. Окончательно уравнение скоростей приобретает вид:

$$\partial_t V + V \partial_x V = -\frac{\Theta_0}{\rho} \partial_x \rho + \nu \partial_{xx}^2 V + \frac{1}{\tau} \left(V_e(\rho) - V \right). \tag{45}$$

Анализ устойчивости стационарного однородного решения данного уравнения показывает, что при значениях плотности, превышающих некоторое критическое значение ρ_{cr}, решение становится неустойчивым к малым возмущениям (область неустойчивости и инкремент возрастания зависят также от длины волны возмущения). Это обстоятельство позволяет теоретически моделировать эффекты, связанные с фантомными заторами, возникающими в однородном потоке в результате случайных возмущений.

Наиболее известной в рассматриваемом классе моделей является КК-модель (модель Kerner-Konhäuser, [52]). Формулировка модели заключается в уравнениях (37),(45), в которых для большей совместимости с уравнением Навье-Стокса классической гидродинамики вместо константы ν используется выражение $\nu(\rho) = \nu_0/\rho$, где ν_0 - коэффициент вязкости.

Анализ устойчивости стационарного однородного решения КК-модели показывает устойчивость этого решения при малых и очень больших значениях плотности, а также наличие области неустойчивости при средних значениях плотности. На основе компьютерных расчетов с использованием данной модели изучен процесс образования и развития *кластеров* — изолированных перемещающихся областей с высокой плотностью и низкой скоростью потока [53, 54, 55, 56].

Все рассмотренные модели не свободны, однако, от некоторых качественных недостатков. Например, при некоторых значениях параметров эти модели могут предсказывать плотности, превышающие максимально допустимые («бампер к бамперу»). Кроме того, при сильных пространственных неоднородностях начальных условий могут возникать отрицательные значения скоростей (затор «рассасывается назад» как результат действия вязкости) [76, 21, 39].

Описанные выше макроскопические модели сформулированы в основном на основе аналогий с уравнениями классической гидродинамики. Существует еще способ вывода макроскопических моделей из описания процесса взаимодействия автомобилей на микроуровне с использованием кинетического уравнения. Этот подход был предложен Пригожиным по аналогии с выводом в статистической физике уравнений динамики газа из кинетического уравнения для фазовой плотности. Таким путем могут быть получены некоторые из перечисленных выше моделей, а также модели существенно более детальные, например, включающие дифференциальные уравнения для описания динамики вариации скоростей, а также модели многополосного движения и др. (см. раздел 3.3).

В отличие от гидродинамических моделей, сформулированных в терминах плотности и средней скорости потока, кинетические модели основаны на описании динамики *фазовой плотности* потока, т.е. плотности распределения автомобилей как по координате, так и по индивидуальной скорости. Зная эволюцию во времени фазовой плотности, можно рассчитать также и макроскопические характеристики потока - плотность, среднюю скорость, вариацию скоростей и другие характеристики, которые определяются *моментами* фазовой плотности по скоростям различного порядка.

Обозначим фазовую плотность как $f(x, v, t)$. Обычная (гидродинамическая) плотность $\rho(x, t)$, средняя скорость $V(x, t)$ и вариация скоростей $\Theta(x, t)$ связаны с моментами фазовой плотности соотношениями:

$$\rho(x,t) = \int_0^\infty dv\, f(x,v,t)\,, \tag{46}$$

$$V(x,t) = \rho(x,t)^{-1} \int_0^\infty dv\, v f(x,v,t)\,, \tag{47}$$

$$\Theta(x,t) = \rho(x,t)^{-1} \int_0^\infty dv\, (v-V)^2 f(x,v,t)\,. \tag{48}$$

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение фазовой плотности со временем, называется кинетическим уравнением. Впервые кинетическое уравнение для транспортного потока было сформулировано Пригожиным и соавторами в 1961 г. в следующем виде [86, 85, 87]:

$$\partial_t f + \partial_x (fv) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel}. \tag{49}$$

Данное уравнение, как и уравнение (37), является уравнением непрерывности, выражающим закон сохранения автомобилей, но теперь уже в фазовом пространстве. Слагаемые в левой части описывают изменение фазовой плотности за счет кинематического переноса, в то время как слагаемые в правой части описывают процесс «мгновенных» изменений скоростей автомобилей за счет процессов *взаимодействия* и *релаксации.*

Согласно Пригожину под взаимодействием двух автомобилей на дороге понимается событие, при котором более быстрый автомобиль догоняет более медленный движущийся впереди автомобиль. При этом водитель быстрого автомобиля либо совершает обгон, либо снижает свою скорость до скорости впереди идущего автомобиля. Следовательно, слагаемое $(\partial f/\partial t)_{int}$ в правой части кинетического уравнения может быть выражено через количество взаимодействий, приводящих к торможению, происходящих в данном месте в единицу времени. Вводятся следующие упрощающие предположения:

1) возможность для обгона находится с некоторой вероятностью p, в результате обгона скорость обгоняющего автомобиля не меняется;

2) скорость впереди идущего автомобиля в результате взаимодействия в любом случае не меняется;

3) взаимодействие происходит в точке (размерами автомобилей и расстоянием между ними можно пренебречь);

4) изменение скорости в результате взаимодействия происходит мгновенно;

5) Рассматриваются только парные взаимодействия, одновременные взаимодействия трех и более автомобилей исключаются.

При данных предположениях слагаемое, описывающее взаимодействия, может быть сформулировано в виде:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int} = \int_v^\infty dv'(1-p)(v'-v)f_2(x,v',x,v,t) - \int_0^v dv'(1-p)(v-v')f_2(x,v,x,v',t), \tag{50}$$

где $f_2(x,v,x',v',t)$ — совместная плотность распределения пар автомобилей с координатами и скоростями соответственно (x,v) и (x',v'). Первый интеграл в (50) описывает процесс увеличения фазовой плотности за счет торможения более быстрых автомобилей до скорости v, второй интеграл — процесс уменьшения плотности за счет торможения автомобилей со скоростью v до меньших скоростей в результате взаимодействия. Если теперь дополнительно принять, что

6) верна гипотеза *автомобильного хаоса* (по аналогии с гипотезой *молекулярного хаоса* в классической газодинамике):

$$f_2(x,v,x',v',t) = f(x,v,t)f(x',v',t),$$

т.е. скорости автомобилей в потоке не коррелированы до и после взаимодействия,

то интегралы в (50) могут быть формально объединены в один интеграл от 0 до ∞ и интерактивный член примет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int} = f(x,v,t)\int_0^\infty dv'(1-p)(v'-v)f(x,v',t). \tag{51}$$

Помимо процесса взаимодействий, приводящих к торможению, в транспортном потоке происходит также процесс спонтанного увеличения скоростей автомобилей, не находящихся в данный момент во взаимодействии с впереди идущим автомобилем. Обозначим через $F(v;x,t)$ распределение скоростей в потоке в точке x в момент времени t. Распределение скоростей удовлетворяет следующим соотношениям:

$$f(x,v,t) = \rho(x,t)F(v;x,t), \qquad \int_0^\infty dvF(v;x,t) \equiv 1. \tag{52}$$

Эмпирические данные показывают, что в свободно движущемся потоке устанавливается естественное (равновесное) распределение скоростей $F_0(v;x,t)$, которое можно интерпретировать как распределение водителей по *желаемым* скоростям движения. Под «желаемой» скоростью понимается та скорость, с которой каждый водитель двигался бы в отсутствие помех и взаимодействий. Согласно Пригожину стремление всех водителей двигаться с желаемыми скоростями приводит к коллективному эффекту релаксации фактического распределения скоростей к «желаемому» распределению. Если обозначить через τ характерное время этого процесса, то слагаемое $(\partial f/\partial t)_{rel}$ в правой части кинетического уравнения можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel} = -\frac{f(x,v,t) - \rho(x,t)F_0(v;x,t)}{\tau} \tag{53}$$

В кинетическом уравнении остаются еще не определенными два параметра: вероятность обгона p и время релаксации τ. Обычно предполагается, что эти параметры являются характеристиками коллективного поведения и поэтому являются функциями *макроскопических* характеристик потока, таких как плотность и средняя скорость потока, и не зависят от *индивидуальных* значений скорости. При таком предположении множитель $(1-p)$ может быть вынесен из интеграла в (51). Это же предположение позволяет выносить параметры p и τ за знак интегрирования при интегрировании кинетического уравнения по скоростям, что существенно облегчает вывод макроскопических уравнений (см. раздел 3.3).

Суммируя (49),(50),(53), получаем кинетическое уравнение в виде

$$\partial_t f + v\partial_x f = -\frac{f - \rho F_0}{\tau} + (1-p)\rho(V-v)f. \tag{54}$$

Исследование полученного уравнения показало наличие у него нетривиальных свойств, допускающих содержательную интерпертацию в терминах транспортного потока. При различных значениях плотности данное уравнение допускает два стационарных пространственно однородных решения с принципиально различными свойствами: решение, в котором распределение скоростей соответствует желаемому распределению, и решение, в котором все автомобили имеют одинаковую скорость. Общее стационарное однородное решение представляет собой суперпозицию этих решений. Данные решения интерпретируются соответственно как *режим индивидуального движения* и *режим коллективного движения*. С увеличением плотности растет доля автомобилей, участвующих в коллективном движении, и падает доля свободно движущихся автомобилей. Процесс разделения потока на две фракции аналогичен процессу конденсации в некоторых известных моделях статистической физики. Анализ устойчивости показывает, что стационарное однородное решение устойчиво при малых плотностях (в режиме индивидуального движения). При увеличении плотности выше критического значения возникает неустойчивость к длинноволновым возмущениям. Наконец, в чисто коллективном движении поток неустойчив к возмущениям с любой длиной волны.

Работы Пригожина и его соавторов имели большое значение для развития кинетического подхода к моделированию транспортного потока, однако само уравнение (54) неоднократно подвергалось критике. Одним из наиболее критичных аспектов теории является гипотеза об «автомобильном хаосе». Эта гипотеза предполагает отсутствие корреляции скоростей автомобилей в периоды между взаимодействиями. Очевидно, однако, что при невозможности обгона догоняющий автомобиль попадает в ситуацию вынужденного следования за впереди идущим автомобилем. В течение последующего промежутка времени скорости этих автомобилей нельзя считать статистически независимыми. Для учета этого эффекта были предложены различные модификации кинетического уравнения. Например, в [1] предложено разделение общей фазовой плотности на плотность потока свободно движущихся автомобилей и потока «блокированных» автомобилей. Систематическое развитие этого подхода приводит к необходимости моделирования динамики плотностей распределения небольших кластеров автомобилей. При этом распределение кластеров фиксированной длины n описывается отдельной функцией распределения для каждого n. Процессы увеличения кластеров за счет присоединения новых автомобилей сзади и уменьшения за счет обгона моделируются соответствующими модификациями интерактивных членов в правых частях уравнений [2, 7, 64, 49].

Другим аспектом, подвергавшимся критике, является принцип коллективной релаксации распределения скоростей. Как показано в [76], кинетическое уравнение с релаксационным членом в форме (53) неадекватно описывает поведение транспортного потока, если поток является пространственно неоднородным. Рассмотрим, например, свободный участок дороги, в который начинает поступать поток. Очевидно, что быстро движущиеся автомобили первыми достигнут конечного участка дороги, в то время как медленно движущимся автомобилям потребуется для этого некоторое время. Однако согласно уравнению (54) распределение скоростей вдоль всей дороги будет с первых же мгновений приближаться к желаемому, т.е. на всем протяжении дороги сразу возникнут медленно движущиеся автомобили. Можно сказать, что желаемое распределение скоростей выступает в модели как свойство дороги, а не водителей. Для устранения этого недостатка Павери-Фонтана [76] предложил важное усовершенствование кинетического уравнения с заменой коллективной релаксации распределения скоростей на *индивидуальную релаксацию* скорости каждого водителя к его желаемой скорости.

Будем считать, что каждый водитель обладает индивидуальной желаемой скоростью w. Тогда мы можем рассмотреть плотность распределения автомобилей в *расширенном фазовом пространстве* $g(x, v, w, t)$, где x - координата, v - фактическая скорость и w - желаемая скорость. Фазовая плотность связана с расширенной фазовой плотностью соотношением

$$f(x, v, t) = \int_0^\infty dw\, g(x, v, w, t). \tag{55}$$

Изменение во времени расширенной фазовой плотности описывается следующим уравнением:

$$\partial_t g + v\partial_x g + \partial_v(a(v, w)g) = \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{int}, \tag{56}$$

где $a(v, w)$ - ускорение автомобиля, движущегося со скоростью v и имеющего желаемую скорость w. Основное отличие (56) от (49) состоит в том, что вместо слагаемого, описывающего коллективную релаксацию, возникло слагаемое в левой части, связанное с индивидуальным ускорением автомобилей. В качестве первого приближения можно предположить:

$$a(v, w) = \frac{w - v}{\tau}, \tag{57}$$

т.е. каждый водитель стремится приблизить свою скорость к желаемой, и τ - характерное время релаксации.

Интерактивное слагаемое получается аналогично (50) подсчетом количества взаимодействий в единицу времени:

$$
\begin{aligned}
(58) \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{int} &= \int_v^\infty dv'(1-p)(v'-v)g(x,v',w,t)f(x,v,t) \\
&- \int_0^v dv'(1-p)(v-v')g(x,v,w,t)f(x,v',t).
\end{aligned}
$$

Интегрируя (56)-(58) по w, можно получить уравнение для обычной фазовой плоскости, называемое *редуцированным* уравнением Павери-Фонтана:

$$
(59) \qquad \partial_t f + v\partial_x f + \partial_v(\frac{W-v}{\tau}f) = (1-p)\rho(V-v)f.
$$

Здесь $W = W(x,v,t)$ - среднее значение желаемой скорости в данной точке фазового пространства:

$$
(60) \qquad f(x,v,t)W(x,v,t) = \int dw\, wg(x,v,w,t).
$$

Строго говоря, редуцированное уравнение не является замкнутым уравнением относительно f, поскольку вычисление W требует знания расширенной плотности g. Однако во многих работах по выводу макроскопических уравнений из уравнения Павери-Фонтана используется именно редуцированная форма, при этом для вычисления W принимаются упрощающие предположения. В простейшем случае можно положить, что все автомобили имеют одинаковую желаемую скорость или что автомобили разделены на классы (легковые и грузовые), и все автомобили одного класса имеют одинаковую желаемую скорость.

Как исходное уравнение Пригожина, так и модифицированное уравнение Павери-Фонтана рассматривают автомобили как точечные объекты, при этом взаимодействие автомобилей также рассматривается, как локализованное в точке. Однако в реальном потоке размеры автомобилей не являются пренебрежимо малыми. Кроме того, автомобиль реагирует на препятствие впереди на некотором расстоянии, которое также нельзя считать пренебрежимо малым, особенно при высокой плотности потока. Модификации кинетического уравнения, позволяющие учесть эти факторы, были сделаны в работах Хельбинга [40, 42]. Хельбинг перенес на описание транспортного потока методы, ранее применявшиеся в статистической физике для описания движения сыпучих материалов, таких как песок или зерно. Модификация касается интерактивного члена, в котором интенсивность взаимодействий быстрых автомобилей ($v' > v$) с автомобилями, движущимися со скоростью v, дается формулой

$$
(61) \qquad \chi(x,t)\int_{v'>v} dv'(v'-v)f_2(x,v',x+s,v,t).
$$

Здесь f_2 — парная плотность распределения взаимодействующих автомобилей. В отличие от (50) координата второго (движущегося впереди) автомобиля берется смещенной на некоторое «расстояние взаимодействия» s, которое также можно интерпретировать как «безопасное» расстояние:

$$
(62) \qquad s = \frac{1}{\rho_{\max}} + TV,
$$

где $\rho_{\max}$ — максимальная («бампер к бамперу») плотность, T — безопасный временной интервал, соблюдаемый водителями[4]. Множитель $\chi(x,t)$ играет роль *эффективного сечения взаимодействий* и отражает нарастание виртуального количества взаимодействий с ростом плотности потока. В первоначальной работе [40] было предложено выражение

$$\chi(x,t) = \frac{1}{1-\rho(x+TV,t)s}, \tag{63}$$

согласно которому интенсивность взаимодействий становится бесконечной, если среднее расстояние между автомобилями в потоке становится равным расстоянию взаимодействия. В последующих работах было предложено другое выражение, обеспечивающее правильную асимптотику решений при $\rho \to 0, \rho \to \rho_{\max}$ [47, 43].

Кинетические модели были также обобщены для описания многополосного движения и движения смешанного потока, состоящего из пользователей разных классов (например, разных типов транспортных средств или водителей с различным типом поведения) [42, 95, 49]. Для этого необходимо ввести фазовые плотности автомобилей разных пользовательских классов на каждой из полос, а в правые части уравнений добавить слагаемые, описывающие процесс смены полос. Приведем здесь многополосную модель, предложенную в [95].

Пусть $f_i^a(x,v,t)$ - фазовая плотность автомобилей класса $a \in \{1,\ldots,A\}$ на полосе $i \in \{1,\ldots,N\}$. Динамика фазовой плотности описывается следующим кинетическим уравнением:

$$\partial_t f_i^a + \partial_x(f_i^a v) + \partial_v\left(f_i^a \frac{V_{0i}^a - v}{\tau_i^a}\right) = \left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{int} + \left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{lc}, \tag{64}$$

где V_{0i}^a - желаемая скорость пользователей класса a на полосе i, τ_i^a - соответствующее время релаксации. Первое слагаемое в правой части описывает процесс торможения в результате взаимодействий, второе слагаемое - процесс смены полосы движения. Рассматриваются три различных типа смены полосы:

- смена полосы в результате взаимодействия с идущим впереди более медленным автомобилем,
- «спонтанная» смена полосы, отражающая желание водителей двигаться по определенной полосе,
- «вынужденная» смена полосы вблизи мест слияния полос, на въездах-выездах с магистрали и др.

Соответственно имеем:

$$\left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{lc} = \left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{lc}^{int} + \left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{lc}^{spont} + \left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{lc}^{mand}. \tag{65}$$

Слагаемые $(\partial f_i^a/\partial t)_{int}$ и $(\partial f_i^a/\partial t)_{lc}^{int}$ определяются через интенсивности взаимодействий. Обозначим: $I_i^{ab}(x,v,t)$ — интенсивность взаимодействий автомобилей класса

[4] Эмпирические исследования показывают, что дистанция, выдерживаемая водителями, зависит от скорости потока, в то время как временной интервал является инвариантной величиной

a со скоростью v в точке x на полосе i со всеми автомобилями класса b, идущими впереди со скоростями $w < v$; $J_i^{ab}(x,v,t)$ - интенсивность взаимодействий на полосе i между всеми автомобилями класса a со скоростями $w > v$ и автомобилями класса b, идущими впереди со скоростью v. Интенсивности $I_i^{ab}(x,v,t)$ дают вклад в уменьшение фазовой плотности $f_i^a(x,v,t)$ за счет смены полос и торможения до меньших скоростей, в то время как $J_i^{ab}(x,v,t)$ дают вклад в увеличение фазовой плотности за счет торможения более быстрых автомобилей класса a до скорости v. Интенсивности даются выражениями, аналогичными (61):

$$I_i^{ab} = \chi_i \int\limits_{v>v'} dv'\,(v-v')f_i^{ab}(x,v,x+s_i^a,v',t)\,, \tag{66}$$

$$J_i^{ab} = \chi_i \int\limits_{v'>v} dv'\,(v'-v)f_i^{ab}(x,v',x+s_i^a,v,t)\,. \tag{67}$$

Обозначим через p_i^a вероятность того, что автомобиль класса a на полосе i может без задержки сменить полосу движения. Очевидно, эта вероятность равна сумме вероятностей перехода на полосу $(i-1)$ справа и $(i+1)$ слева: $p_i^a = p_{i,i-1}^a + p_{i,i+1}^a$. Эти вероятности предполагаются функциями макроскопических переменных, таких как плотности и средние скорости на полосах.

В терминах интенсивностей взаимодействий интерактивные члены в правой части кинетического уравнения принимают вид

$$\left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{\rm int} = (1-p_i^a)\sum_b \left[\mathcal{J}_i^{ab}(x,v,t) - \mathcal{I}_i^{ab}(x,v,t)\right]\,, \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{\rm lc}^{\rm int} = \sum_b \Big[& p_{i-1,i}^a\mathcal{I}_{i-1}^{ab}(x,v) - p_{i,i-1}^a\mathcal{I}_i^{ab}(x,v) \\ &+ p_{i+1,i}^a\mathcal{I}_{i+1}^{ab}(x,v) - p_{i,i+1}^a\mathcal{I}_i^{ab}(x,v)\Big]\,.\end{aligned} \tag{69}$$

Скорости процессов спонтанной смены полосы пропорциональны фазовым плотностям, причем коэффициенты пропорциональности, определяющие частоту происходящих смен полос, удобно представить в виде $1/T_{i-1,i}^a$. Величины $T_{i-1,i}^a$ имеют размерность времени и интерпретируются как характерные средние времена между сменами полос. Средние времена также предполагаются функциями макроскопических переменных. С учетом этих обозначений спонтанные члены в правой части кинетического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f_i^a}{\partial t}\right)_{\rm lc}^{\rm spont} &= \frac{f_{i-1}^a(x,v,t)}{T_{i-1,i}^a} - \frac{f_i^a(x,v,t)}{T_{i,i-1}^a} \\ &+ \frac{f_{i+1}^a(x,v,t)}{T_{i+1,i}^a} - \frac{f_i^a(x,v,t)}{T_{i,i+1}^a}\,.\end{aligned} \tag{70}$$

Для средних времен подходящим является выражение

$$\frac{1}{T_{i,j}^a} = g_{i,j}^a\left(\frac{\rho_i}{\rho_i^{\max}}\right)^{\beta_1}\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_j^{\max}}\right)^{\beta_2}, \tag{71}$$

которое согласуется с имеющимися эмпирическими данными [96].

Вид слагаемых, относящихся к вынужденной смене полос, зависит от конретных особенностей дороги. Пример с сужением дороги и слиянием двух полос в одну приведен в [95].

Среди других модификаций кинетического уравнения отметим [71, 107, 57], где сделана попытка описания процессов разгона аналогично процессам торможения, т.е. как результат стохастического процесса взаимодействий автомобилей.

3.3. Вывод макроскопических моделей из кинетического уравнения

Непосредственное использование кинетических уравнений для моделирования транспортного потока не всегда удобно в связи с большой размерностью задачи. Важное теоретическое значение этих уравнений состоит в том, что на их основе можно систематически выводить уравнения для макроскопических переменных, таких как плотность и средняя скорость.

Согласно (47)-(48) макроскопические переменные могут быть выражены через моменты фазовой плотности по переменной скорости. Произвольный момент порядка k дается формулой

$$m_k(x,t) = \int_0^\infty dv v^k f(x,v,t). \tag{72}$$

Умножая обе части кинетического уравнения (54) на v^k и интегрируя по dv, получаем дифференциальное уравнение для k-го момента:

$$\partial_t m_k + \partial_x m_{k+1} = -\frac{m_k - m_{0k}}{\tau} + (1-p)(m_1 m_k - \rho m_{k+1}). \tag{73}$$

Здесь m_{0k} - k-й момент распределения желаемых скоростей, которое в модели Пригожина рассматривается как заданная функция. Для $k = 0$ уравнение (73) дает уравнение непрерывности (37). Уравнение для $k = 1$ после ряда преобразований может быть приведено к уравнению скоростей (44), в котором «внутреннее давление» потока связано с вариацией скоростей в потоке соотношением $\mathcal{P}(\rho) = \rho\Theta(\rho)$, а равновесная скорость V_e дается выражением

$$V_e = V_0 - (1-p)\tau\rho\Theta. \tag{74}$$

Как следует из этого выражения, равновесная скорость равна средней желаемой скорости, из которой вычтено слагаемое, описывающее условия движения. Падение скорости тем выше, чем выше плотность или разброс скоростей. Кроме того, к падению равновесной скорости приводит увеличение времени релаксации или уменьшение вероятности обгона. Таким образом, кинетический подход позволяет обосновывать вид макроскопических уравнений, а также получать аналитические выражения и содержательные интерпретации функций и параметров модели.

Уравнения для моментов (73) образуют бесконечную цепочку, в которой для вычисления динамики момента порядка k требуется знание динамики момента порядка $k+1$. Чтобы оборвать эту цепочку и замкнуть систему уравнений при некотором k, вводится приближенное выражение, связывающее $k+1$-й момент с моментами меньшего порядка. Чаще всего цепочка обрывается при $k = 1$ с использованием некоторого приближенного выражения для вариации скоростей в зависимости от плотности $\Theta = \Theta(\rho)$, хотя в ряде работ исследуется динамическое уравнение для вариации.

Макроскопические уравнения были впервые получены из кинетического уравнения Пригожина в [81], в [76] приводятся также уравнения для моментов, полученные интегрированием уравнения Павери-Фонтана. Однако эти уравнения не были доведены до стадии калибровки по реальным данным и дальнейшего продолжения работы не получили. Возрождение интереса к этому направлению произошло в середине девяностых годов в связи с работами Хельбинга и его соавторов [39, 38, 40, 42, 95, 43]. Хельбинг использовал в качестве основы кинетическое уравнение Павери-Фонтана, предложив ряд его модификаций и обобщений, позволивших в конечном итоге получить хорошо откалиброванные макромодели транспортного потока.

Уравнение Павери-Фонтана (56) сформулировано для плотности распределения в *расширенном* фазовом пространстве, т.е. распределения по фактическим скоростям v и желаемым скоростям w. Момент порядка k по фактической скорости и порядка l по желаемой скорости дается выражением

$$m_{k,l}(x,t) = \int_0^\infty dv v^k \int_0^\infty dw g(x,v,w,t). \tag{75}$$

В частности, плотность автомобилей есть момент нулевого порядка: $\rho = m_{0,0}$, средняя скорость и средняя желаемая скорость определяются моментами первого порядка: $\rho V = m_{1,0}$, $\rho W = m_{0,1}$; аналогично определяются вариации и корреляция фактической и желаемой скорости и т.д.

Вывод уравнений для моментов из кинетического уравнения в общем случае не так прост, как это описано выше для уравнения Пригожина. Важное отличие уравнения Павери-Фонтана от уравнения Пригожина состоит в том, что составляющие интерактивный член интегралы (58) не могут быть формально объединены в один интеграл по переменной скорости, взятый от 0 до ∞. В результате умножение кинетического уравнения на $v^k w^l$ и интегрирование по v и w не дает замкнутого уравнения для моментов (исключение составляют моменты вида $m_{k,0}$, т.е. моменты, связанные с распределением фактических скоростей, для которых такой вывод возможен и приведен в [76]). Аналогичная трудность возникает при других модификациях кинетического уравнения, например, при рассмотрении «неточечных» взаимодействий и др. Возможен, однако, приближенный вывод макроскопических уравнений при помощи итеративного метода, известного в статистической физике как метод Чапмана-Энскога. Так называемое «нулевое приближение» для этого метода состоит в предположении, что распределение фактических и желаемых скоростей в потоке является локально нормальным распределением вида

$$g(x,v,w,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\Delta} (\Theta_{vv}(\delta V)^2 - \Theta_{vw}\delta V \delta W + \Theta_{ww}(\delta W)^2) \right\}, \tag{76}$$

где $\Delta = \Theta_{vv}\Theta_{ww} - \Theta_{vw}^2$. Подставляя это выражение в интеграл взаимодействий кинетического уравнения и интегрируя по скоростям, можно получить уравнения для моментов.

На следующем шаге выводится уравнение для коррекции первого порядка к нулевому приближению и т.д. В кинетической теории газов показано, что нулевое приближение к решению кинетического уравнения приводит к гидродинамическому уравнению Эйлера, а коррекция первого порядка - к уравнению Навье-Стокса. Как показали вычисления, транспортные уравнения для нулевого и первого приближений во многом аналогичны соответствующим уравнениям гидродинамики, поэтому эти уравнения называют соответственно Эйлеро-подобными и Навье-Стокса-подобными уравнениями транспортной динамики. Вывод уравнений для разных вариантов кинетического уравнения дан в [38, 41, 104, 103, 46, 95].

Среди макроскопических моделей, полученных на основе интегрирования кинетического уравнения, наиболее хорошо изучена и откалибрована по реальным данным GKT-модель (Gaz-Kinetic Traffic model, [47, 95]). Здесь мы приведем формулировку однополосного варианта модели. Существенной особенностью модели является учет «нелокальности» взаимодействий. Автомобили, находящиеся в точке x, взаимодействуют с автомобилями впереди на расстоянии взаимодействия $x + s(\rho, V)$. В последующих формулах переменные, значения которых берутся в смещенной точке $x + s$, для краткости обозначаются штрихом. Желаемая скорость для всех водителей для простоты полагается константой, а для совместного распределения скоростей V и V' принимается в Эйлеровом приближении бивариантное нормальное распределение, аналогичное (76). После интегрирования кинетического уравнения в пространстве скоростей получаем искомую макроскопическую модель транспортного потока. Ее математическая формулировка заключается в обычном уравнении непрерывности (37) для плотности и уравнении вида (44) для скорости, в котором «внутреннее давление» потока связано с вариацией скоростей в потоке соотношением $\mathcal{P}(\rho) = \rho\Theta(\rho)$, а равновесная скорость V_e дается выражением

$$V_e = V_0 - \tau(1-p)B(\delta V). \tag{77}$$

Ключевым в модели является член $B(\delta V)$. Он происходит от интеграла взаимодействий в кинетическом уравнении и заключает в себе описание эффекта взаимодействий между автомобилями. Этот член называется *больцмановским фактором.* Этот фактор зависит от эффективной безразмерной разности скоростей δV в точках x и $x+s$, а также от вариации скоростей в потоке Θ. Больцмановский фактор имеет вид

$$B(\delta V) = \chi(\rho)\rho' S\left[\delta V N(\delta V) + (1+\delta V^2)E(\delta V)\right], \tag{78}$$

$$\delta V = (V - V')/\sqrt{S}, \tag{79}$$

$$S = \Theta - 2k\sqrt{\Theta\Theta'} + \Theta'. \tag{80}$$

Здесь $N(x)$ — стандартное нормальное распределение, а $E(x)$ — неполный интеграл этого распределения:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{81}$$

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} dy\, e^{-\frac{y^2}{2}}. \tag{82}$$

Больцмановский фактор пренебрежимо мал при отрицательной разности скоростей (в ускоряющемся потоке) и резко возрастает с увеличением положительной разности скоростей (в замедляющемся потоке). При этом эффективная разность скоростей (79) уменьшается с ростом вариации Θ или увеличением корреляции k скоростей в потоке. Можно сказать, что большой разброс индивидуальных скоростей «смазывает» эффект от регулярного снижения средней скорости в направлении движения, что выражается в уменьшении эффективной разности скоростей, хотя в целом больцмановский фактор растет с ростом вариации благодаря множителю S в (78).

Для вариации и коэффициента корреляции применяются аппроксимирующие выражения, полученные на основе эмпиричекий данных. В частности, $\Theta(\rho) = \alpha(\rho)V^2$, где $\alpha(\rho)$ - функция, близкая к ступенчатой, с малым значением при низких плотностях и скачком в области средних плотностей потока. Другой важной функцией, которая нуждается в аппроксимации, является «эффективное сечение взаимодействия» $\chi(\rho)$. На основе калибровки модели и с учетом требуемых асимптотик при низких и высоких плотностях в [47] получено следующее выражение:

$$[1 - p(\rho)]\chi(\rho) = \frac{V_0 T^2}{\tau\alpha(\rho_{\max})} \frac{\rho}{(1 - \rho/\rho_{\max})^2}\,. \tag{83}$$

Исследования показали, что модель адекватно воспроизводит наблюдаемые свойства транспортного потока, такие как возникновение stop-and-go движения, гистерезис при переходе от режима свободного к заторному движению и др [47, 48, 43]. Модель применялась, в частности, для анализа динамики потока вблизи источника неравномерности (въезды и съезды с автострады), где была получена диаграмма различных качественных состояний потока при разных значениях набегающего потока и потока на въезде [44]. Вывод и калибровка более общего варианта модели для нескольких полос и нескольких классов пользователей дана в [95].

3.4. Микроскопические модели

Первые микроскопические модели были предложены в 50-х годах в [89, 82]. Пусть автомобили занумерованы индексом n в соответствии с их порядком на дороге. В микромоделях предполагается, что ускорение n-го автомобиля определяется состоянием соседних автомобилей. При этом основное влияние оказывает непосредственно предшествующий автомобиль $n-1$. Этот автомобиль часто называют *лидирующим*, а весь класс микромоделей — моделями *«следования за лидером» (follow-the-leader)*.

Будем обозначать через x_n и v_n соответственно координаты и скорости автомобилей. В качестве основных факторов, определяющих ускорение n-го автомобиля, можно выделить следующие:

- скорость данного автомобиля относительно лидирующего автомобиля $\Delta v_n(t) = v_n(t) - v_{n-1}(t)$;
- собственная скорость автомобиля $v_n(t)$, которая определяет безопасный интервал для движения;
- дистанция до лидирующего автомобиля, $d_n(t) = x_{n-1}(t) - x_n(t)$ или, как вариант, «чистая» дистанция $s_n(t) = d_n(t) - l_{n-1}$, учитывающая длину автомобиля l_n.

Соответственно, в общем виде движение автомобилей определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_n(t) = f(v_n, \Delta v_n, d_n). \tag{84}$$

Различия между моделями определяются видом функции f.

3.4.1. Модели следования за лидером.

В первых вариантах модели следования за лидером предполагалось, что каждый водитель адаптирует свою скорость к скорости лидирующего автомобиля:

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\tau}\left[v_{n-1}(t) - v_n(t)\right], \tag{85}$$

где τ - характерное время адаптации.

В [82] уравнение (85) было получено дифференцированием по времени соотношения

$$\Delta x_n(t) = x_{n-1}(t) - x_n(t) = (\Delta x)_{safe} + \tau v_n(t), \tag{86}$$

выражающее стремление водителей сохранять зависящую от скорости безопасную дистанцию $(\Delta x)_{safe}$ до лидирующего автомобиля.

Однако данная простая модель не описывает такие свойства реального потока, как неустойчивость и возникновение волн заторов. Был предложен ряд ее модификаций. Так, в [12] предложено ввести в левую часть уравнения задержку аргумента $\Delta t \approx 1,3$ с, отражающую время реакции водителей на изменение скорости лидирующего автомобиля. Далее, множитель $1/\tau$ в (85) можно интерпретировать как *коэффициент чувствительности* $\mathcal{S}$, характеризующий скорость реакции водителя к изменению скорости лидера. В общем случае этот коэффициент является динамической величиной, зависящей от скорости и текущей дистанции до лидера. С учетом сказанного модель можно записать в виде дифференциального уравнения со смещенным аргументом

$$\dot{v}_n(t + \Delta t) = \mathcal{S}[v_{n-1}(t) - v_n(t)]. \tag{87}$$

Уравнения такого типа обычно демонстрируют неустойчивость при достаточно больших значениях Δt. В частности, при $S = 1/T = const$ условие неустойчивости уравнения (87) имеет вид $\Delta t/T > 1/2$. Наличие неустойчивости позволяет в принципе моделировать развитие волн заторов. Однако уравнение, в котором коэффициент чувствительности S предполагается константой, не воспроизводит многие свойства реального потока, например, фундаментальную диаграмму, т.е. зависимость потока от плотности. Более адекватная модель может быть получена из предположения, что чувствительность возрастает при уменьшении дистанции до лидера. В [33] предложено выражение для этого коэффициента, согласующееся с экспериментальными данными:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0}\frac{[v_n(t+\Delta t)]^{m_1}}{[x_{n-1}(t) - x_n(t)]^{m_2}}, \tag{88}$$

где m_1 и m_2 - эмпирически подбираемые константы.

Рассмотрим однородный стационарный поток, в котором все скорости v_n и интервалы d_n одинаковы. Тогда плотность потока есть $1/d_n$, а равновесная скорость $V_e = v_n$. Отсюда получаем равновесное соотношение скорости и плотности

$$V_e(\rho) = V_0[1 - (\rho/\rho_{\max})^{m_2-1}]^{1/(1-m_1)}, \tag{89}$$

где V_0 — скорость свободного движения (желаемая скорость), $\rho_{\max}$ — максимально допустимая плотность автомобилей. Близкие к эмпирическим фундаментальные диаграммы получены при значениях параметров $m_1 \approx 0{,}8$, $m_2 \approx 2{,}8$ [68] или $m_1 = 0{,}953$, $m_2 = 3{,}05$ [62, 63].

В настоящее время модель следования за лидером используется в программном пакете MITSIM. Более подробный обзор вариантов модели и истории предмета содержится в [9].

3.4.2. Модели оптимальной скорости.

Одним из недостатков модели следования за лидером является то, что она неправильно описывает динамику одиночного автомобиля. Ускорение автомобиля в отсутствие лидера в этой модели равно нулю, в то время как разумным является предположение о стремлении водителя приблизить свою скорость к некоторой желаемой скорости v_n^0. Модели другого типа исходят из предположения, что для каждого водителя существует «безопасная» скорость движения $v_e'(d_n)$, зависящая от дистанции до лидера. Данная скорость также называется *оптимальной скоростью*. В этих моделях вместо адаптации скорости к скорости лидера предполагается адаптация к оптимальной скорости. Влияние лидера косвенно выражено через зависимость оптимальной скорости от дистанции. Такая модель впервые предложена в [72], где предполагалась адаптация скорости с запаздыванием по времени:

$$v_n(t+\Delta t) = v_e'(d_n(t)) = v_e(s_n(t)). \tag{90}$$

В [4, 5] предложено использование дифференциального уравнения

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\tau}(v_e'(d_n(t)) - v_n(t)), \tag{91}$$

где оптимальная скорость дается выражением

$$v_e'(d) = \frac{v_0}{2}(\tanh(d - d_c) + \tanh d_c) \tag{92}$$

с подходящими константами v_0 and d_c. Данное уравнение может быть получено разложением (90) в ряд Тейлора до членов первого порядка по $\tau = \Delta t$: $v_n(t+\Delta t) \approx v_n(t) + \Delta t\, dv_n(t)/dt$.

Можно показать, что малое возмущение в модели оптимальной скорости приводит к развитию затора, если выполнено условие неустойчивости

$$\frac{dv_e'(d_n)}{d\,d_n} = \frac{dv_e(s_n)}{ds_n} > \frac{1}{2\tau}, \tag{93}$$

т.е. в случае большого времени релаксации τ или крутого вида зависимости оптимальной скорости от дистанции $v_e(s_n)$. Сходные результаты получены в [3, 105] для аналогичных моделей с дополнительным запаздыванием реакции по времени Δt.

3.4.3. Модель Трайбера.

Стандартная модель оптимальной скорости обладает рядом недостатков. В частности, она очень чувствительна к конкретному выбору функциональной зависимости оптимальной скорости от дистанции $v'_e(d_n)$, а также к выбору τ. При больших значениях τ в модели начинают происходить столкновения автомобилей, в то время как при слишком малых значениях возникают нереалистично большие ускорения. На самом деле характерные времена разгона приблизительно в пять раз превышают характерные времена торможения. Кроме того, в реальности водители выдерживают большую дистанцию и тормозят раньше при высокой скорости относительно лидера $\Delta v_n(t)$. Для учета этих и других особенностей реального поведения водителей было разработано много вариантов модели [34, 58, 59, 8, 45, 99].

Одной из наиболее удачных микромоделей можно признать модель «разумного водителя» (Intelligent Driver Model, IDM), разработанную Трайбером [100, 101]. Калибровка и численные эксперименты с этой моделью показали, что ее свойства устойчивы к вариации параметров; модель демонстрирует реалистическое поведение при разгоне и торможении и воспроизводит основные наблюдаемые свойства транспортного потока.

В модели IDM предполагается, что ускорение автомобиля является непрерывной функцией скорости v_n, «чистой» дистанции до лидера $s_n = d_n - l_{n-1}$ и скорости относительно лидера Δv_n:

$$\dot{v}_n = a_n \left[1 - \left(\frac{v_n}{v_n^0} \right)^{\delta} - \left(\frac{s_n^*(v_n, \Delta v_n)}{s_n} \right)^2 \right]. \tag{94}$$

Слагаемое $a_n[1 - (v_n/v_n^0)^\delta]$ в правой части этого уравнения описывает динамику ускорения автомобиля на свободной дороге, в то время как слагаемое $f_{n,n-1} = -a_n[s_n^*(v_n, \Delta v_n)/s_n]^2$ описывает торможение, связанное со взаимодействием с лидером. Выбор параметра δ позволяет откалибровать поведение, связанное с разгоном. Значение $\delta = 1$ соответствует экспоненциальному по времени разгону, характерному для большинства других моделей. При увеличении этого параметра ускорение не убывает экспоненциально в процессе разгона (в пределе при $\delta \to \infty$ происходит разгон с постоянным ускорением a_n вплоть до достижения желаемой скорости v_n^0), что лучше соответствует поведению водителей. Тормозящий член зависит от отношения «желаемой» дистанции s_n^* и фактической дистанции s_n, причем желаемая дистанция дается выражением

$$s_n^*(v_n, \Delta v_n) = s'_n + s''_n \sqrt{\frac{v_n}{v_n^0}} + T_n v_n + \frac{v_n \Delta v_n}{2\sqrt{a_n b_n}}. \tag{95}$$

Параметры модели могут быть выбраны индивидуально для каждого n-го автомобиля, что позволяет учесть индивидуальные характеристики водителей и транспортных средств. Однако многие общие характеристики потока могут быть получены из рассмотрения идентичных водителей. Параметры имеют содержательную интерпретацию, это — желаемая скорость v_0, безопасный временной интервал T, максимальное ускорение a, «комфортное» (не экстренное) торможение b, показатель «чувствительности» при ускорении δ, «заторные» дистанции s' и s'' и длина автомобиля l. Для сокращения числа параметров можно упростить модель, положив $\delta = 1$, $s'' = 0$ и $l = 0$, при этом адекватность модели в значительной степени сохраняется.

В равновесном потоке, когда $\dot{v}_n = 0$ и $\Delta v_n = 0$, водители стремятся сохранить зависящую от скорости равновесную дистанцию до лидера $s_e(v) = s^*(v, 0)[1 -$

$(v/v_0)^\delta]^{-1/2}$. Из этого соотношения можно найти равновесную скорость и построить фундаментальную диаграмму. В частности, в специальном случае, когда $\delta = 1$ и $s' = s'' = 0$, можно найти аналитическое выражение для равновесной скорости

$$v_e(s) = \frac{s^2}{2v_0T^2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4T^2v_0^2}{s^2}}\right]. \tag{96}$$

Из этого выражения и очевидного соотношения, связывающего дистанцию с плотностью автомобилей $s = (d - l) = (1/\rho - l) = (1/\rho - 1/\rho_{\max})$, получаем равновесный поток $Q_e(\rho) = \rho V_e(\rho)$ как функцию плотности, т.е. фундаментальную диаграмму. Коэффициент δ влияет на форму диаграммы таким образом, что при росте δ переход от свободного к загруженному режиму становится более резким. В пределе при $\delta \to \infty$ и $s'' = 0$ фундаментальная диаграмма становится треугольной с углом в точке максимального потока: $Q_e(\rho) = \min(\rho v_0, [1 - \rho(l + s')]/T)$. При уменьшении δ форма кривой сглаживается, приближаясь к наблюдаемой.

3.4.4. Клеточные автоматы.

Клеточными автоматами (Cellural Automata, CA) называют идеализированное представление физических систем, в котором время и пространство представляются дискретными, и все элементы системы имеют некоторый дискретный набор возможных состояний. Концепция CA была введена фон Нейманном в 50-х годах в связи с абстрактной теорией самовоспроизводящихся вычислительных машин. Позже CA были применены к моделированию большого количества динамических систем в самых разных областях. Впервые CA был предложен для моделирования транспортного потока в [15]. Активная разработка и исследования CA в области транспорта началась после работ Нагеля и Шрекенберга (Nagel-Schreckenberg, [70]). В настоящее время опубликовано большое число работ по CA, подробный обзор которых дан, например, в [13].

В моделях CA координата и скорость автомобиля, а также время представляются дискретными переменными. Дорога (полоса дороги) разбивается на условные «ячейки» одинаковой длины Δx, причем в каждый момент времени ячейка либо пуста, либо занята единственным «автомобилем». На каждом шаге по времени $t \longrightarrow t + 1$ состояние всех ячеек одновременно (параллельно) обновляется в соответствии с некоторым набором правил. Выбор того или иного набора правил определяет все разнообразие вариантов CA. Принятое описание является, конечно, очень упрощенным, однако этим достигается высокая производительность компьютерных вычислений. Благодаря высокой вычислительной эффективности модели CA привлекают большое внимание исследователей и разработчиков программ для транспортных расчетов в последние годы.

Дадим формулировку исходной модели Нагеля-Шрекенберга. Обозначим через x_n и v_n координату и скорость n-го автомобиля, $d_n = x_{n+1} - x_n$ - дистанцию до лидирующего автомобиля. Скорость может принимать одно из $v_{\max} + 1$ допустимых *целочисленных* значений $v_n = 0, 1, ..., v_{\max}$. На каждом шаге $t \longrightarrow t+1$ состояние всех автомобилей в системе обновляется в соответствии со следующими правилами.
Шаг 1: Ускорение. Если $v_n < v_{\max}$, то скорость n-го автомобиля увеличивается на

единицу, если $v_n = v_{\max}$, то скорость не изменяется:

$$v_n \longrightarrow \min(v_n + 1, v_{\max}).$$

Шаг 2: Торможение. Если $d_n \leqslant v_n$, то скорость n-го автомобиля уменьшается до $d_n - 1$:

$$v_n \longrightarrow \min(v_n, d_n - 1).$$

Шаг 3: Случайные возмущения. Если $v_n > 0$, то скорость n-го автомобиля может быть уменьшена на единицу с вероятностью p; скорость не изменяется, если $v_n = 0$:

$$v_n \xrightarrow{p} \max(v_n - 1, 0).$$

Шаг 4: Движение. Каждый автомобиль продвигается вперед на количество ячеек, соответствующее его новой скорости после выполнения шагов 1–3:

$$x_n \longrightarrow x_n + v_n.$$

Шаг 1 отражает общую тенденцию водителей двигаться как можно быстрее, не превышая максимально допустимую скорость. Шаг 2 гарантирует отсутствие столкновений с впереди идущими автомобилями. Шаг 3 вносит элемент стохастичности, тем самым учитывая случайные различия в поведении водителей, в частности, чрезмерное торможение. Для реалистического описания транспортного потока типичная длина ячейки выбирается равной 7,5 м, что примерно соответствует расстоянию, которое занимает один автомобиль в заторе. Шаг по времени 1 с при этом соответствует $v_{\max} = 5$. Для потока на магистрали обычно принимается $p = 0{,}5$, для уличного движения $p = 0{,}2$ и $v_{\max} = 2$ [23].

Изложенная модель является «минимальной» моделью в том смысле, что приведенные выше четыре шага необходимы для воспроизведения самых основных свойств реального потока. Однако для адекватного моделирования более сложных аспектов динамики потока необходима формулировка дополнительных правил (или корректировка приведенных). Численные эксперименты показывают, что поток является устойчивым при малых плотностях и теряет устойчивость при высоких плотностях. При этом ключевую роль в развитии неустойчивостей играет стохастичность процесса, т.е. для развития заторов требуется, чтобы p не равнялось нулю. При $p = 0$ поток остается устойчивым при всех значениях плотности [69, 70]. Данное обстоятельство может рассматриваться как серьезный теоретический недостаток моделей CA по сравнению с макромоделями или моделями следования за лидером, в которых флуктуации играют роль начального толчка, а дальнейшее развитие затора объясняется неустойчивостью (вполне детерминированного) равновесного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alberti E., Belli G.* Contributions to the Boltzmann-like approach for traffic flow—A model for concentration dependent driving programs // Transpn. Res. 1978. V. 12. P. 33–42.

2. *Andrews F. C.* A statistical theory of traffic flow on highways—II. Three-car interactions and the onset of queuing // Transpn. Res. 1970. V. 4. P. 367–377.

3. *Bando M., Hasebe K., Nakanishi K., Nakayama A.* Analysis of optimal velocity model with explicit delay // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 5429–5435.

4. *Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y.* Structure stability of congestion in traffic dynamics // Jpn. J. Industr. Appl. Math. 1994. V. 11. P. 203–223.

5. *Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y.* Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 1035–1042.

6. *Beckmann M. J., McGuire C. B., Winsten C. B.* Studies in the Economics of Transportation. New Haven, Conn: Yale University Press, 1956.

7. *Beylich A. E.* Elements of a kinetic theory of traffic flow / Rarefied Gas Dynamics. Ed. Campargue R., V. 1. Paris: Commissariat a l'Energie Atomique, 1979. P. 129–138.

8. *Bleile T.* Traffic simulation supporting urban control system development // Proceedings of the 4th world Congress on Intelligent Transport Systems. Brussels: ITS Congr. Association, 1997.

9. *Brackstone M., McDonald M.* Car following: A historical review // Transpn. Res. F. 2000. V. 2. P. 181–196.

10. *Carey M.* Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem // Transpn. Res. B. 1992. V. 26. P. 127–133.

11. *Carrothers G. A. P.* An historical review of the gravity and potential concepts of human interaction // J. American Instit. Planners. 1956. V. 22. P. 94–102.

12. *Chandler R. E., Herman R., Montroll E. W.* Traffic dynamics: Studies in car following // Oper. Res. 1958. V. 6. P. 165–184.

13. *Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A.* Statistical physics of vehicular traffic and some related systems // Phys. Rep. 2000. V. 329. P. 199–329.

14. *Cliff A. D., Martin R. L., Ord J. K.* Evaluating the friction of distance parameter in gravity models // Regional Studies. 1974. V. 8. P. 281–286.

15. *Cremer M., Ludwig J.* A fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations // Math. Comp. Simul. 1986. V. 28. P. 297–303.

16. *Cremer M., Meißner F.* Traffic prediction and optimization using an efficient macroscopic simulation tool / Modelling and Simulation 1993. Ed. Pave A., Soc. Comput. Simulation Int., Ghent. 1993. P. 515–519.

17. *Cremer M., Papageorgiou M.* Parameter identification for a traffic flow model // Automatica. 1981. V. 17. P. 837–843.

18. *Daganzo C. F.* The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory // Transpn. Res. B. 1994. V. 28. P. 269–287.

19. *Daganzo C. F.* The cell transmission model, Part II: Network traffic // Transpn. Res. B. 1995. V. 29. P. 79–93.

20. *Daganzo C. F.* A finite difference approximation of the kinematic wave model of traffic flow // Transpn. Res. B. 1995. V. 29. P. 261–276.

21. *Daganzo C. F.* Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow // Transpn. Res. B. 1995. V. 29. P. 277–286.

22. *Daganzo C. F., Sheffi Y.* On stochastic models of traffic assignment // Transpn. Sci. 1977. V. 11. P. 253–274.

23. *Esser J., Schreckenberg M.* Microscopic simulation of urban traffic based on cellular automata // Int. J. Mod. Phys. C. 1997. V. 8. P. 1025–1036.

24. *Fik T. J.* Hierarchical interaction: the modeling of competing central place system // The Ann. Reg. Sci. 1988. V. 22. P. 48–69.

25. *Fik T. J., Mulligan G. F.* Spatial flows and competing central places: towards a general theory of hierarchical interaction // Envir. & Plan. A. 1990. V. 22. P. 527–549.

26. *Florian M.* A traffic equilibrium model of travel by car and public transit modes // Transpn. Sci. 1977. V. 11. P. 166–179.

27. *Fotheringham A. S.* A new set of spacial-interaction models: the theory of competing destinations // Envir. & Plan. A. 1983. V. 15. P. 15–36.

28. *Fotheringham A. S.* Modelling hierarchical destination choice // Envir. & Plan. A. 1986. V. 18. P. 401–418.

29. *Frank M., Wolfe P.* An algorithm for quadratic programming // Nav. Res. Log. Q. 1956. V. 3. P. 95–110.

30. *Friesz T. L., Luque F. J., Tobin R. L., Wie B. W.* Dynamic network traffic assignment considered as a continuous time optimal control problem // Oper. Res. 1989. V. 37. P. 893–901.

31. *Gartner N. H.* Optimal traffic assignment with elastic demands: A review; Part ii: Algorithmic approaches // Transpn. Sci. 1980. V. 14. P. 192–208.

32. *Gazis D. C.* Traffic Science. N.Y.: Wiley, 1974.

33. *Gazis D. C., Herman R., Rothery R. W.* Nonlinear follow the leader models of traffic flow // Oper. Res. 1961. V. 9. P. 545–567.

34. *Gipps P. G.* A behavioural car following model for computer simulation // Transpn. Res. B. 1981. V. 15. P. 105–111.

35. *Gonçalves M. B., Ulysséa-Neto I.* The development of a new gravity-opportunity model for trip distribution // Envir. & Plan. A. 1993. V. 25. P. 817–826.

36. *Harris B., Wilson A. G.* Equilibrium values and dynamics of attractiveness terms in production-constrained spatial-interaction models // Envir. & Plan. A. 1978. V. 10. P. 371–388.

37. *Haynes K. E., Fotheringham A. S.* Gravity and spacial-interaction models. Ser.: Scientific geography Series 2. Beverly Hills, CA: Sage, 1984.

38. *Helbing D.* High-fidelity macroscopic traffic equations // Physica A. 1995. V. 219. P. 391–407.

39. *Helbing D.* Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 3164–3169.

40. *Helbing D.* Derivation and empirical validation of a refined traffic flow model // Physica A. 1996. V. 233. P. 253–282.

41. *Helbing D.* Gas-kinetic derivation of Navier-Stokes-like traffic equations // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 2366–2381.

42. *Helbing D.* Verkehrsdynamik. Berlin: Springer, 1997.

43. *Helbing D., Hennecke A., Shvetsov V., Treiber M.* MASTER: Macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model // Transpn. Res. B. 2001. V. 35. P. 183–211.

44. *Helbing D., Hennecke A., Treiber M.* Phase diagram of traffic states in the presence of inhomogeneities // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 4360–4363.

45. *Helbing D., Tilch B.* Generalized force model of traffic dynamics // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 133–138.

46. *Helbing D., Treiber M.* Enskog equations for traffic flow evaluated up to navier-stokes order // Gran. Matt. 1998. V. 1. P. 21–31.

47. *Helbing D., Treiber M.* Gas-kinetic-based traffic model explaining observed hysteretic phase transition // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 3042–3045.

48. *Helbing D., Treiber M.* Jams, waves, and clusters // Science. 1998. V. 282. P. 2001–2003.

49. *Hoogendoorn S., Bovy P. H. L.* Gas-kinetic model for multi-lane heterogeneous traffic flow // Transpn. Res. Rec. 1999. V. 1678. P. 150–159.

50. *Janson B. N.* Dynamic traffic assignment for urban road networks // Transpn. Res. B. 1991. V. 25. P. 143–161.

51. *Jayakrishnan R., Tsai Wei K., Chen A.* A dynamic traffic assignment model with traffic-flow relationships // Transpn. Res. C. 1995. V. 3. P. 51–72.

52. *Kerner B. S., Konhäuser P.* Cluster effect in initially homogeneous traffic flow // Phys. Rev. E. 1993. V. 48. P. R2335–R2338.

53. *Kerner B. S., Konhäuser P.* Structure and parameters of clusters in traffic flow // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. 54–83.

54. *Kerner B. S., Konhäuser P., Schilke M.* Deterministic spontaneous appearance of traffic jams in slightly inhomogeneous traffic flow // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. R6243–R6246.

55. *Kerner B. S., Konhäuser P., Schilke M.* Formation of traffic jams caused by fluctuations and random processes in traffic flow // Proc. 7th World Conf. Transport Res. Ed. Hensher D. V. 2. Oxford: Pergamon, 1995. P. 167–182.

56. *Kerner B. S., Konhäuser P., Schilke M.* 'Dipole-layer' effect in dense traffic flow // Phys. Lett. A. 1996. V. 215. P. 45–56.

57. *Klar A., Wegener R.* Enskog-like kinetic models for vehicular traffic // J. Stat. Phys. 1997. V. 87. P. 91–114.

58. *Krauß S., Wagner P., Gawron C.* Continuous limit of the nagel-schreckenberg model // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3707–3712.

59. *Krauß S., Wagner P., Gawron C.* Metastable states in a microscopic model of traffic flow // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 5597–5602.

60. *Kühne R. D.* Macroscopic freeway model for dense traffic—Stop-start waves and incident detection // Proc. 9th Int. Sympos. Transport. and Traffic Theory. Ed. Hamerslag R. Utrecht: VNU Science, 1984. P. 21–42.

61. *Kühne R. D.* Freeway speed distribution and acceleration noise—Calculations from a stochastic continuum theory and comparison with measurements // Proc. 10th Int. Sympos. on Transport. and Traffic Theory. Ed. Gartner N. H. N.Y.: Elsevier, 1987. P. 119–137.

62. *Kühne R. D., Kroen A.* Knowledge-based optimization of line control systems for freeways // Int. Conf. Artificial Intelligence Appl. Transportation Engineering. San Buenaventura, California, June 20–24 1992. P. 173–192.

63. *Kühne R. D., Rödiger M. B.* Macroscopic simulation model for freeway traffic with jams and stop-start waves // Proc. 1991 Winter Simulation Conf. Ed. Nelson B. L. Phoenix, Arizona: Society for Comput. Simul. Int., 1991. P. 762–770.

64. *Lampis M.* On the kinetic theory of traffic flow in the case of a nonnegligible number of queueing vehicles // Transpn. Sci. 1978. V. 12. P. 16–28.

65. *LeBlanc L. J., Morlok E. K., Pierskalla W.* An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem // Transpn. Res. B. 1975. V. 9. P. 309–318.

66. *Lighthill M. J., Whitham G. B.* On kinematic waves: II. A theory of traffic on long crowded roads // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1955. V. 229. P. 317–345.

67. *Maher M. J., Hughes P. C.* A probit-based stochastic user equilibrium assignment model // Transpn. Res. B. 1997. V. 31. P. 341–355.

68. *May, Jr. A. D., Keller H. E. M.* Non-integer car-following models // Highway Res. Rec. 1967. V. 199. P. 19–32.

69. *Nagel K., Herrmann H. J.* Deterministic models for traffic jams // Physica A. 1993. V. 199. P. 254–269.

70. *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // J. Phys. I France. 1992. V. 2. P. 2221–2229.

71. *Nelson P.* A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions // Transp. Theor. Stat. Phys. 1995. V. 24. P. 383–409.

72. *Newell G. F.* Nonlinear effects in the dynamics of car following // Opns. Res. 1961. V. 9. P. 209–229.

73. *Newell G. F.* A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, I General theory, II Queueing at freeway bottlenecks, III Multi-destination flows // Transpn. Res. B. 1993. V. 27. P. 281–313.

74. *Papageorgiou M.* Applications of Automatic Control Concepts to Traffic Flow Modeling and Control. Berlin: Springer, 1983.

75. *Pape U.* Implementation and efficiency of Moor-algorithms for the shortest route problem // Math. Program. 1974. V. 7. P. 212–222.

76. *Paveri-Fontana S. L.* On Boltzmann-like treatments for traffic flow. A critical review of the basic model and an alternative proposal for dilute traffic analysis // Transpn. Res. 1975. V. 9. P. 225–235.

77. *Payne H. J.* Models of freeway traffic and control / Mathematical Models of Public Systems. Ed. Bekey G. A. V. 1. La Jolla, CA: Simulation Council, 1971. P. 51–61.

78. *Payne H. J.* A critical review of a macroscopic freeway model // Research Directions in Computer Control of Urban Traffic Systems. Ed. Levine W. S. N.Y.: Amer. Soc. of Civil Engineers, 1979. P. 251–265.

79. *Payne H. J.* FREFLO: A macroscopic simulation model of freeway traffic // Transpn. Res. Rec. 1979. V. 722. P. 68–77.

80. *Phillips W. F.* A kinetic model for traffic flow with continuum implications // Transpn. Plan. Technol. 1979. V. 5. P. 131–138.

81. *Phillips W. F.* A new continuum traffic model obtained from kinetic theory // Proc. 1978 IEEE Conf. Decision and Control. N.Y.: IEEE, 1979. P. 1032–1036.

82. *Pipes L. A.* An operational analysis of traffic dynamics // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. P. 274–281.

83. *Popkov Yu. S.* Macrosystems theory and its applications. Berlin: Springer Verlag, 1995.

84. *Powell W. B., Sheffy Y.* The convergence of equilibrium algorithms with predetermined step sizes // Transpn. Sci. 1982. V. 16. P. 45–55.

85. *Prigogine I.* A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow / Theory of Traffic Flow. Ed. Herman R. Amsterdam: Elsevier, 1961.

86. *Prigogine I., Andrews F. C.* A Boltzmann-like approach for traffic flow // Oper. Res. 1960. V. 8. P. 789–797.

87. *Prigogine I., Herman R.* Kinetic Theory of Vehicular Traffic. N.Y.: Elsevier, 1971.

88. *Rathi A. K., Lieberman E. B., Yedlin M.* Enhanced FREFLO: Modeling of congested environments // Transpn. Res. Rec. 1987. V. 1112. P. 61–71.

89. *Reuschel A.* Fahrzeugbewegungen in der Kolonne // Österr. Ingen.-Archiv. 1950. V. 4. P. 193–215.

90. *Sen A.* Maximum likelihood estimation of gravity model parameters // J. Regional Sci. 1986. V. 26. P. 461–474.

91. *Sheffy Y.* Urban Transportation Networks. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1985.

92. *Sheffy Y., Powell W. B.* An algorithm for the equilibrium assignment problem with random link times // Network. 1982. V. 12. P. 191–207.

93. *Sheppard E. S.* Gravity parameter estimation // Geographical Analysis. 1979. V. 11. P. 120–132.

94. *Shvetsov V. I., Dubov Yu. A.* Expected distributions in the intervening opportunities model // Envir. & Plan. A. 1997. V. 29. P. 1229–1241.

95. *Shvetsov V. I., Helbing D.* Macroscopic dynamics of multilane traffic // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. P. 6328–6339.

96. *Sparmann U., editor.* Spurwechselvorgänge auf zweispurigen BAB-Richtungsfahrbahnen. Bonn-Bad Godesberg: Bundesministerium für Verkehr, Abt. Straßenbau, 1978.

97. *Spiess H., Florian M.* Optimal strategies: a new assignment model for transit networks // Transpn. Res. B. 1989. V. 23. P. 83–102.

98. *Stouffer S. A.* Intervening opportunities: a theory relating mobility and distance // American Sociological Review. 1940. V. 5. P. 845–867.

99. *Tomer E., Safonov L., Havlin S.* Presence of many stable nonhomogeneous states in an inertial car-following model // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 382–385.

100. *Treiber M., Helbing D.* Explanation of observed features of self-organization in traffic flow. e-print cond-mat/9901239, 1999.

101. *Treiber M., Hennecke A., Helbing D.* Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 1805–1824.

102. *Voorhees A. M.* A general theory of traffic movement. ITE, 1955.

103. *Wagner C.* A Navier-Stokes-like traffic model // Physica A. 1997. V. 245. P. 124–138.

104. *Wagner C., Hoffmann C., Sollacher R., Wagenhuber J., Schürmann B.* Second order continuum traffic flow model // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 5073–5085.

105. *Wang B.-H., Wang L., Hui P. M., Hu B.* Analytical results for the steady state of traffic flow models with stochastic delay // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 2876–2882.

106. *Wardrop J. G.* Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Institution of Civil Engineers II. 1952. P. 325–378.

107. *Wegener R., Klar A.* A kinetic model for vehicular traffic derived from a stochastic microscopic model // Transp. Theor. Stat. Phys. 1996. V. 25. P. 785–798.

108. *Whitham G. B.* Linear and Nonlinear Waves. N.Y.: Wiley, 1974.

109. *Whitham G. B.* Lectures on Wave Propagation. Berlin: Springer, 1979.

110. *Wills M. J.* A flexible gravity-opportunities model for trip distribution // Transpn. Res. B. 1986. V. 20. P. 89–111.

111. *Wilson A. G.* A statistical theory of spatial distribution models // Transpn. Res. 1967. V. 1. P. 253–270.

112. *Wilson A. G.* Entropy in urban and regional modelling. London: Pion, 1970.

113. *Wilson A. G.* A family of spatial interaction models and associated developments // Envir. & Plan. A. 1971. V. 3. P. 255–282.

114. *Диниц Е. А.* Экономные алгоритмы нахождения кратчайших путей в сети // Транспортные системы. М.: ВНИИСИ, 1978. С. 36–44.

115. *Лившиц В. В.* Математическая модель случайно-детерминированного выбора и ее применение для расчета трудовых корреспонденций / Автоматизация процессов градостроительного проектирования. М.: ЦНИИП градостроительства, 1973. С. 39–57.

116. *Лившиц В. В.* Системная концентрация города и математическое моделирование адаптационного поведения городского населения // Использование прикладного системного анализа в проектировании и управлении развитием городов. М.: Стройиздат, 1974. С. 120–138.

117. *Лившиц В. В., Стрельников А. И.* Калибровка и проверка гравитационной статистической модели трудовых корреспонденций. М.: ЦНИИП градостроительства, 1983. С. 79–101.

118. *Лившиц В. Н., ред.* Автоматизация планирования и управления транспортными системами. М.: Транспорт, 1987.

119. Математическое обеспечение градостроительного проектирования. Л.: Наука, 1989.

120. *Попков Ю. С., Посохин М. В., Гутнов А. Э., Шмульян Б. Л.* Системный анализ и проблемы развития городов. М., 1983.

121. *Ромм А. П., ред.* Автоматизация процессов градостроительного проектирования. М.: ЦНИИП градостроительства, 1983.

122. *Стенбринк П. А.* Оптимизация транспортных сетей. М.: Транспорт, 1981.

123. *Федоров В. П.* Математическая модель формирования пассажиропотоков // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. 1974. N 4. С. 17–26.

124. *Яковлев Л. А.* Пакет прикладных программ для проектирования систем городских путей сообщений. М.: ЦНИИП градостроительства, 1983. С. 57–78.